Ovidiu Bădescu

Descoperind MATEMATICA de LICEU

Editura Graph
2020

Titlul: Descoperind MATEMATICA de LICEU
Autor: Ovidiu Bădescu
ISBN 978-606-8838-11-3

Descrierea CIP a Bibliotecii Naţionale a României
BĂDESCU, OVIDIU
Descoperind matematica de liceu / Ovidiu Bădescu. - Reşiţa : Graph, 2020
ISBN 978-606-8838-11-3

51(075)(076)

Ce aduce nou acest memorator?

- o “grămadă” de formule, spun eu aproape suficiente pentru a obţine la BAC o notă foarte mare.
- metode de abordare a unor tipuri de probleme cu o frecvenţă mare prin variantele de BAC

Cum îl veţi folosi?

- veţi începe să rezolvaţi variantele de BAC şi de fiecare dată când nu veţi şti o formulă sau o metodă de rezolvare veţi căuta în acest memorator.
- veţi nota formula nou găsită pe un carneţel al vostru astfel încât înainte de BAC să aveţi propriul vostru memorator
- veţi repeta înainte de evaluare formulele din carneţelul vostru, nu are sens să memoraţi toate formulele scrise de mine
- dacă veţi întâlni formule care nu sunt în memorator, întrebaţi-vă profesorul şi notaţi-le pe ultimele pagini libere

Nu pot încheia fără a mulţumi Mihaelei Puşcaşu pentru lipsa ei de somn şi uşurinţa cu care a început să înţeleagă matematica.

Ovidiu Bădescu

Mobil: 0741017700
http: www.ovidiubadescu.ro
e-mail: badescuovidiu@yahoo.com

Capitolul I
GEOMETRIE VECTORIALĂ(IX)

1) Condiţiile ca trei numere reale a,b,c **să fie laturile unui triunghi sunt:** $a,b,c>0$ şi $a<b+c$ şi $b<c+a$ şi $c<a+b$

2) Linii importante in triunghi

a) mediana - uneşte vârful triunghiului cu mijlocul laturii opuse, sunt 3 mediane care se intersectează în G numit centru de greutate

b) înălţimea - perpendiculara din vârf pe latura opusă, sunt 3 înălţimi care se intersectează în H numit ortocentru

c) mediatoarea - perpendiculara pe mijlocul laturii, poate să nu treacă prin vârf, sunt 3 mediatoare care se intersectează în I numit centrul cercului circumscris

d) bisectoarea - împarte unghiul în două părţi egale, sunt 3 bisectoare care se intersectează în I numit centrul cercului înscris

3) Proprietăţi în triunghiul dreptunghic cu $m(\sphericalangle A)=90°$

T. lui Pitagora ΔABC dreptunghic $\Leftrightarrow BC^2=AB^2+AC^2$

T. catetei ΔABC dreptunghic $\Rightarrow AB^2=BC\cdot BD$, unde BD este proiecţia catetei AB pe ipotenuză

T. înălţimii ΔABC dreptunghic $\Rightarrow AD^2=BD\cdot CD$

Obs.1: lungimea înălţimii: $AD=\dfrac{c_1\cdot c_2}{ip.}$

Obs.2: În ΔABC cu AM mediană, avem relaţia

$$AM=\frac{BC}{2}\Leftrightarrow\left(\Delta \text{ABC e dreptunghic cu m}(\sphericalangle \text{A})=90°\right)$$

4) Teorema lui Thales

În ΔABC avem: $MN \parallel BC \Leftrightarrow \dfrac{AM}{MB}=\dfrac{AN}{NC}$

5) Teorema fundamentală a asemănării

În ΔABC avem: $MN \parallel BC \Leftrightarrow \dfrac{AM}{AB}=\dfrac{AN}{AC}=\dfrac{MN}{BC}$

6) Teorema lui Menelaos În ΔABC fie $M \in AC, P \in BC, N \in AB$. Atunci punctele M, N, P sunt coliniare $\frac{AM}{MC} \cdot \frac{CP}{PB} \cdot \frac{BN}{NA} = 1$

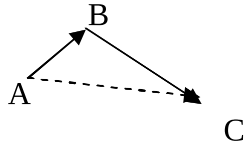
7) Teorema lui Ceva În ΔABC fie $M \in AC, P \in BC, N \in AB$. Atunci dreptele AP, BM, CN sunt concurente $\frac{AM}{MC} \cdot \frac{CP}{PB} \cdot \frac{BN}{NA} = 1$

8) Teorema bisectoarei În ΔABC fie $M \in BC$. Atunci

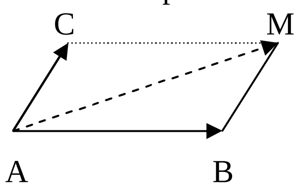
$$\left(AM \text{ bisectoare pt. } \sphericalangle \mathrm{A} \right) \Leftrightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{BM}{CM}$$

9) Suma a doi vectori

a) **necolininari, regula triunghiului** – se poate aplica doar dacă originea celui de-al doilea vector coincide cu extremitatea primului vector, iar rezultatul e un vector ce porneşte din originea primului vector şi are extremitatea în extremitatea celui de-al doilea, adică $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$



a) necolininari, regula paralelogramului – se poate aplica doar dacă cei doi vectori au aceeaşi origine, iar rezultatul e un vector ce porneşte din originea comună a celor doi vectori şi are extremitatea în cel de-al patrulea $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AM}$.



10) Modulul unei sume de vectori – se exprimă întreaga sumă de vectori în funcţie de un vector dat, se foloseşte că $\left| a\vec{v} \right| = |a| \cdot \left| \vec{v} \right|$, iar modulul unui vector este lungimea segmentului din care provine

11) Situarea punctelor date prin relaţii vectoriale – se cere situarea unui punct M dacă $\overrightarrow{AB} = k \cdot \overrightarrow{BM}$ sau altele analoage, se deduce coliniaritatea punctelor, apoi se discută în funcţie de cele 3 situaţii de situare a punctului nou

12) Exprimarea unui vector în funcţie de doi vectori daţi – se foloseşte regula triunghiului sau regula paralelogramului.
Obs.: dacă se cere o exprimare de vectori în hexagon regulat, găsim punctul de intersecţie şi exprimăm în funcţie de acest punct

13) Coliniaritatea a doi vectori

Metoda I: se exprimă în funcţie de vectorii dintr-o bază (doi vectori necoliniari) şi se arată că au coordonatele proporţionale

Metoda II: $\left(\vec{u} \text{ si } \vec{v} \text{ coliniari}\right) \Leftrightarrow \left(\exists k \in \mathbb{R}^* \text{ cu } \vec{u} = k \cdot \vec{v}\right)$

Obs.: vectori coliniari sau vectori paraleli este acelaşi lucru

14) Coliniaritatea a trei puncte – se arată că vectorii $\overrightarrow{AB}$ si $\overrightarrow{AC}$ sunt coliniari, şi cum au un punct comun înseamnă că cele trei puncte sunt coliniare

15) Proprietăţi ale vectorilor necoliniari – dacă $\vec{u}$ şi $\vec{v}$ necoliniari, din relaţia $a \cdot \vec{u} + b \cdot \vec{v} = \vec{0} \Rightarrow (a = 0 \text{ si } b = 0)$

16) $\overrightarrow{AM}$ **mediană în triunghiul ABC** $\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$

17) Împărţirea unui segment într-un raport dat

Dacă $\frac{BM}{MC} = k \Rightarrow \forall A$ avem $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{1+k} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{k}{1+k} \cdot \overrightarrow{AC}$

Dacă $\frac{CM}{MB} = k \Rightarrow \forall A$ avem $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{1+k} \cdot \overrightarrow{AC} + \frac{k}{1+k} \cdot \overrightarrow{AB}$

18) Condiţia ca G **este centru de greutate în** ΔABC

a) G centru greut în $\Delta ABC \Leftrightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

b) G centru greut în $\Delta ABC \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3 \cdot \overrightarrow{MG}, \forall M$

19) Coordonatele unui vector

a) dacă $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} \Rightarrow$ coordonatele sale sunt (x, y)

b) dacă ştim punctele $A(x_A, y_A)$ şi $B(x_B, y_B)$, atunci coordonatele vectorului $\overrightarrow{AB}$ sunt $(x_B - x_A; y_B - y_A)$

c) egalitatea a doi vectori – dacă $\vec{u} = x_u\vec{i} + y_u\vec{j}, \vec{v} = x_v\vec{i} + y_v\vec{j}$,

atunci $\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow x_u = x_v$ şi $y_u = y_v$

20) Modulul vectorului $\vec{v} = x_v \cdot \vec{i} + y_v \cdot \vec{j}$ este $\left|\vec{v}\right| = \sqrt{x_v^2 + y_v^2}$

21) Operaţii cu vectori daţi prin coordonate

$\overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2} = (x_1 + x_2)\vec{i} + (y_1 + y_2)\vec{j}$ şi $\alpha\vec{u} = \alpha x\vec{i} + \alpha y\vec{j}$

22) Condiţia de coliniaritate (e acelaşi lucru cu condiţia de paralelism) Dacă $\vec{u} = x_u\vec{i} + y_u\vec{j}$ şi $\vec{v} = x_v\vec{i} + y_v\vec{j}$, atunci condiţia ca

$$\vec{u} \parallel \vec{v} \Leftrightarrow \frac{x_u}{x_v} = \frac{y_u}{y_v}$$

23) Condiţia de perpendicularitate: Dacă $\vec{u} = x_u\vec{i} + y_u\vec{j}$ şi $\vec{v} = x_v\vec{i} + y_v\vec{j}$, atunci condiţia ca:

$$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow x_u x_v + y_u y_v = 0$$

24) Produsul scalar a doi vectori - dacă $\vec{u} = x_u\vec{i} + y_u\vec{j}$ şi $\vec{v} = x_v\vec{i} + y_v\vec{j}$, atunci $\vec{u} \cdot \vec{v} = x_u x_v + y_u y_v$ sau $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\left(\sphericalangle(\vec{u}, \vec{v})\right) = \sqrt{x_u^2 + y_u^2} \cdot \sqrt{x_v^2 + y_v^2} \cdot \cos\varphi$, unde $\sphericalangle(\vec{u}, \vec{v})$ este unghi orientat trigonometric

25) Deducerea cosinusului unghiului dintre doi vectori

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x_u x_v + y_u y_v = \left|\vec{u}\right| \cdot \left|\vec{v}\right| \cdot \cos\left(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}\right) \Rightarrow \cos\left(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}\right) = \frac{x_u x_v + y_u y_v}{\left|\vec{u}\right| \cdot \left|\vec{v}\right|}$$

Obs.1: un unghi e ascuţit $\Leftrightarrow \cos(\sphericalangle)>0$

Obs.2.: un unghi e obtuz $\Leftrightarrow \cos(\sphericalangle)<0$

Capitolul II
GEOMETRIE CU COORDONATE (X)

1) Reper cartezian - este format din două axe de coordonate perpendiculare, axa absciselor Ox şi axa ordonatelor Oy

Obs.: $M \in Ox \Rightarrow y_M = 0$ $\qquad$ $M \in Oy \Rightarrow x_M = 0$

2) Distanţa între punctele $M_1(x_1, y_1)$ şi $M_2(x_2, y_2)$ **(lungimea segmentului** M_1M_2**)** este $M_1M_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

3) Coordonatele mijlocului segmentului M_1M_2 unde $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ sunt $\begin{cases} x_M = \dfrac{x_1 + x_2}{2} \\ y_M = \dfrac{y_1 + y_2}{2} \end{cases}$

4) Coordonatele centrului de greutate al $\Delta M_1M_2M_3$ cu $M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2), M_3(x_3, y_3)$ sunt $\begin{cases} x_G = \dfrac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \\ y_G = \dfrac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \end{cases}$

5) Condiţia ca o figură să fie paralelogram

$ABCD$ paralelogram $\Leftrightarrow$ diagonalele au acelaşi mijloc

6) Împărţirea unui segment în raport *k*

M împarte BC în raportul $k = \dfrac{BM}{MC} \Rightarrow \begin{cases} x_M = \dfrac{1}{1+k} x_B + \dfrac{k}{1+k} x_C \\ y_M = \dfrac{1}{1+k} y_B + \dfrac{k}{1+k} y_C \end{cases}$

7) Determinarea intersecţiei unei drepte cu axele de coord.:

$\cap Ox : y = 0 \Rightarrow x = ... \Rightarrow A(...,0)$

$\cap Oy : x = 0 \Rightarrow y = ... \Rightarrow B(0,...)$

Obs.: dacă dreapta are o singura necunoscută, atunci ea este perpendiculară pe axa a cărei necunoscută apare

8) Panta unei drepte:

$$m_d = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -\frac{a}{b} = m = tg\varphi$$

9) Calculul determinantului de ordin 3

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + dhc - gec - bdi - afh$$

10) Determinarea ecuaţiei unei drepte ce trece printr-un punct $M_1(x_1, y_1)$ şi are pantă cunoscută m este: $d : y - y_1 = m(x - x_1)$

11) Determinarea ecuaţiei unei drepte ce trece prin două puncte $M_1(x_1, y_1)$ şi $M_2(x_2, y_2)$ este:

metoda I: $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$ şi calculăm determinantul cu fomulă

metoda II: $\dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1}$

12) Ecuaţia unei drepte ce trece prin origine $y = mx$

Ecuaţia primei bisectoare $y = x$

Ecuaţia celei de-a doua bisectoare $y = -x$

13) Ecuaţia unei drepte paralele cu $x = a$ **este** $x = b, \forall b \neq a$

Ecuaţia unei drepte paralele cu $y = a$ **este** $y = b, \forall b \neq a$

14) Intersecţia a două drepte - se găseşte rezolvând sistemul format din ecuaţiile acelor drepte

15) Verificarea dacă un punct aparţine unei drepte – înlocuim coordonatele sale în ecuaţia dreptei şi dacă obţinem relaţie adevărată, atunci punctul e pe dreaptă, dacă obţinem relaţie falsă, punctul nu e pe dreaptă

16) Determinarea unui punct situat pe o dreaptă – dăm lui x o valoare şi determinăm valoarea lui y.

Obs.: analog putem da lui y o valoare şi determina valoarea lui x

17) Două drepte coincid doar dacă au coeficienţii proporţionali, adică $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$

18) Condiţia ca 3 puncte $M_1(x_1,y_1)$, $M_2(x_2,y_2)$ şi $M_3(x_3,y_3)$ **să fie coliniare:**

metoda I: se arată că $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}=0$

metoda II: se determină ecuaţia dreptei determinate de două dintre ele, se pune condiţia ca şi cel de-al treilea să fie pe aceeaşi dreaptă

metoda III: se arată că panta dreptei determinate de 2 dintre ele este egală cu panta dreptei determinate de alte două puncte

19) Aria unui triunghi de vârfuri $M_1(x_1,y_1)$, $M_2(x_2,y_2)$, $M_3(x_3,y_3)$ este $S=\frac{1}{2}\cdot|\Delta|$ unde $\Delta=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$

20) Distanţa de la un punct $M(x_M,y_M)$ **la o dreaptă de ecuaţie** $d: ax+by+c=0$ este

$$\text{dist.}(M,d)=\frac{|ax_M+by_M+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

21) Condiţie de paralelism:

$$d_1 \parallel d_2 \Leftrightarrow m_1=m_2$$

22) Condiţia ca două drepte să fie concurente

$$d_1 \text{ şi } d_2 \text{ sunt concurente} \Leftrightarrow m_1 \neq m_2$$

23) Condiţie de perpendicularitate:

$$d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow m_1 \cdot m_2 = -1$$

24) Determinarea ecuaţiei medianei unui triunghi

E1) ştim coordonatele vârfurilor triunghiului, găsim mijlocul laturii

E2) folosim ecuaţia dreptei ce trece prin două puncte (vârful şi mijlocul laturii opuse)

25) Determinarea ecuaţiei înălţimii unui triunghi

E1)se calculează panta laturii şi rezultă că panta înălţimii este $-\dfrac{1}{m_l}$

E2) folosim ecuaţia dreptei ce trece printr-un punct şi are pantă cunoscută

26) Determinarea ecuaţiei mediatoarei unui triunghi

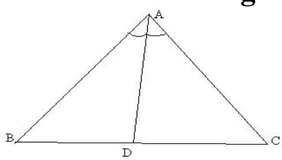
E1) se calculează mijlocul şi panta laturii

E2) ştim punctul (mijlocul laturii) şi panta mediatoarei $\left(-\dfrac{1}{m_l}\right)$

E3) folosim ecuaţia dreptei ce trece printr-un punct şi are pantă cunoscută $d: y - y_1 = m(x - x_1)$

27) Determinarea ecuaţiei bisectoarei unui triunghi

E1) se foloseşte teorema bisectoarei $\Rightarrow \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{BD}{DC}$



E2) se calculează

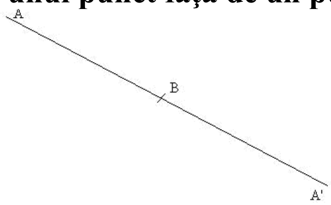
$$AB = \sqrt{\ldots}, AC = \sqrt{\ldots} \Rightarrow \frac{BD}{DC} = k$$

E3) punctul D împarte segmentul BC în raport k

$$\Rightarrow x_D = \frac{1}{1+k}x_B + \frac{k}{1+k}x_C; y_D = \frac{1}{1+k}y_B + \frac{k}{1+k}y_C$$

E4) ştim A şi D $\Rightarrow$ ecuaţia bisectoarei

28) Determinarea simetricului unui punct faţă de un punct



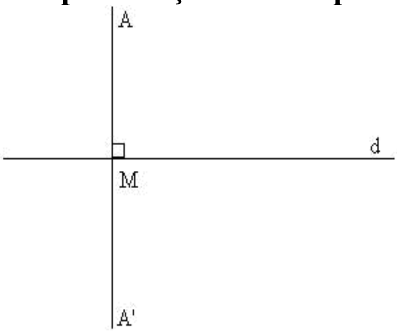
E$_1$) se trasează segmentul AB, se prelungeşte cu un segment congruent BA'

E$_2$) B este mijlocul lui AA'

$$\Rightarrow x_B = \frac{x_A + x_{A'}}{2} \Rightarrow x_{A'} = \ldots;$$

$$y_B = \frac{y_A + y_{A'}}{2} \Rightarrow y_{A'} = \ldots$$

29) Determinarea simetricului unui punct faţă de o dreaptă

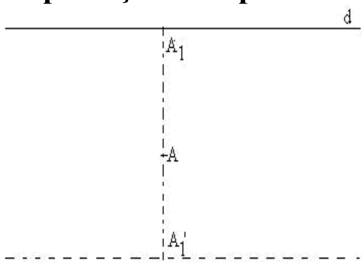


E$_1$) se duce proiecţia lui A pe d se prelungeşte cu un segment congruent

E$_2$) AA' este perpendicular pe dreapta d $\Rightarrow$ aflăm panta lui AA' $\Rightarrow$ ecuaţia lui AA'

E$_3$) $AA' \cap d = \{M\}$, M este mijlocul lui $AA' \Rightarrow$ coordonatele punctului A'

30) Determinarea simetricei unei drepte faţă de un punct

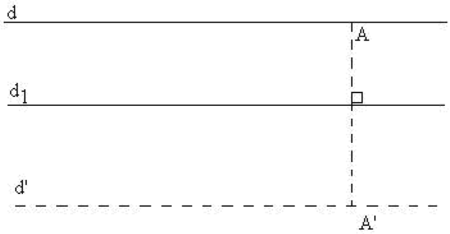


E$_1$) se duce proiecţia lui A pe d $\Rightarrow A_1$, se prelungeşte A_1A cu un segment congruent $\Rightarrow A_1'$

E$_2$) prin A_1' ducem d' paralelă cu d căci $m_{d'} = m_d$, iar A_1' este cunoscut (A mijlocul lui A_1A_1')

31) Determinarea simetricei unei drepte faţă de o dreaptă paralelă

E$_1$) se verifică paralelismul dreptelor d şi d_1

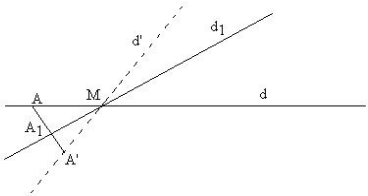


E$_2$) se alege un punct pe d (preferabil o intersecţie cu una din axe), se duce simetricul faţă de $d_1 \Rightarrow A'$

E$_3$) prin A' ducem $d' \| d$ căci ştim $m_{d'}$ şi A'

32) Determinarea simetricei unei drepte faţă de o dreaptă neparalelă

E$_1$) se verifică dacă dreptele sunt concurente



E$_2$) se alege un punct pe d (preferabil o intersecţie cu una din axe), se duce simetricul faţă de $d_1 \Rightarrow A'$

E$_3$) se calculează $d \cap d_1 \Rightarrow M$

E$_4$) se ştiu A' şi M $\Rightarrow$ ecuaţia lui d'

32) Calculul măsurii unui unghi format de două drepte:

$$tg\varphi = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right|,$$

căci întotdeauna se consideră unghiul ascuţit între 2 drepte

Obs.: Dacă valoarea fracţiei e pozitivă, atunci unghiul e ascuţit, altfel unghiul e obtuz

Capitolul III
TRIGONOMETRIE (IX)

1) Trigonometrie în triunghiul dreptunghic

$\sin = \frac{cat.op}{ip}$; $\cos = \frac{cat.alat}{ip}$;

$tg = \frac{cat.op}{cat.alat}$; $ctg = \frac{cat.alat}{cat.op}$

2) Transformarea din grade în radiani şi invers

a) din grade în radiani folosim regula de 3 simplă

180°..π

α°..x

b) din radiani în grade, înlocuim $\pi = 180°$

3) Tabelul trigonometric

E1) se poate calcula sinus şi cosinus pentru unghiuri de: $0°, 30°, 45°, 60°, 90°$

E2) în linia de construcţie se pun cifrele de la 0 la 4

E3) se extrage radical din fiecare

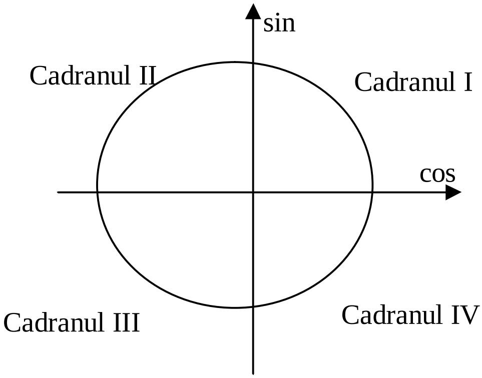
E4) rezultatul se împarte la doi si se trece la sinus

E5) la cosinus se trec valorile de la sinus, doar că în ordine inversă

	0	30°	45°	60°	90°
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tg	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	\
ctg	\	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
linie de constructie	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$

E6) la tangentă folosim $tg = \frac{cat.op}{cat.alat}$ iar la cotangentă luăm valorile de la tangentă şi le scriem în ordine inversă

4) Semnele lui „cos” şi „sin” în cele patru cadrane



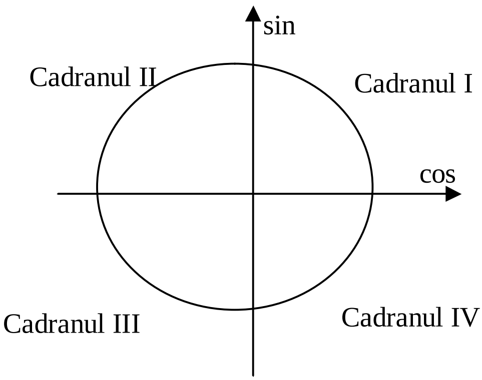
$$x \in Cd.\text{I} \Rightarrow \begin{cases} \cos x > 0 \\ \sin x > 0 \end{cases}$$

$$x \in Cd.\text{II} \Rightarrow \begin{cases} \cos x < 0 \\ \sin x > 0 \end{cases}$$

$$x \in Cd.\text{III} \Rightarrow \begin{cases} \cos x < 0 \\ \sin x < 0 \end{cases}$$

$$x \in Cd.\text{IV} \Rightarrow \begin{cases} \cos x > 0 \\ \sin x < 0 \end{cases}$$

5) Determinarea valorilor funcţiilor „cos” şi „sin” în punctele de intersecţie ale cercului trigonometric cu axele de coordonate



$$\begin{cases} \cos 0 = 1 \\ \sin 0 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos \frac{\pi}{2} = 0 \\ \sin \frac{\pi}{2} = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos \pi = -1 \\ \sin \pi = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos \frac{3\pi}{2} = 0 \\ \sin \frac{3\pi}{2} = -1 \end{cases}$$

6) Formula fundamentală a trigonometriei $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
- se foloseşte atunci când ştim o funcţie trigonometrică şi când se cer celelalte, însă semnul trebuie ales în funcţie de cadrane

7) Funcţii complementare

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x$$

$$tg\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=ctgx=\frac{1}{tg\ x} \qquad ctg\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=tgx=\frac{1}{ctg\ x}$$

8) Paritatea, imparitatea funcţiilor trigonometrice

$$\sin(-x)=-\sin x \qquad \cos(-x)=\cos x$$

$$tg\,(-x)=-tgx \qquad ctg\,(-x)=-ctgx$$

Obs.: singura funcţie pară este cosinus, celelalte sunt impare.

9) Periodicitatea funcţiilor trigonometrice

$$\sin(x+2k\pi)=\sin x, \forall k\in\mathbb{Z}, \quad \cos(x+2k\pi)=\cos x, \forall k\in\mathbb{Z}$$

$$tg\,(x+k\pi)=tgx, \forall k\in\mathbb{Z}, \qquad ctg\,(x+k\pi)=ctgx, \forall k\in\mathbb{Z}$$

Obs.: dacă vrem să folosim periodicitatea pentru fracţie, scoatem întâi întregii din fracţie, apoi folosim periodicitatea.

10) Formule trigonometrice fundamentale

a) “cos “ păstrează acelaşi tip de funcţii, schimbă semnul

$$\cos(a+b)=\cos\ a\cdot\cos\ b-\sin\ a\cdot\sin\ b$$

$$\cos(a-b)=\cos\ a\cdot\cos\ b+\sin\ a\cdot\sin\ b$$

b) “ sin” schimbă funcţiile, păstrează semnul

$$\sin(a+b)=\sin\ a\cdot\cos b+\cos a\cdot\sin b$$

$$\sin(a-b)=\sin\ a\cdot\cos b-\cos a\cdot\sin b$$

c) “tg” păstrează semnul la numărător, iar la numitor îl schimbă

$$tg\,(a+b)=\frac{tga+tgb}{1-tga\cdot tgb} \qquad tg\,(a-b)=\frac{tga-tgb}{1+tga\cdot tgb}$$

d) “ctg” păstrează semnul la numitor, la numărător îl schimbă

$$ctg\,(a+b)=\frac{ctgactgb-1}{ctgb+ctga} \qquad ctg\,(a-b)=\frac{ctgactgb+1}{ctgb-ctga}$$

Obs.: Se folosesc la $\sin 15°=\sin(45°-30°), \sin 75°=\sin(45°+30°)$

11) Formule trigonometrice pentru dublul unui unghi

a) $\sin 2a = 2\sin a \cdot \cos a$

b) $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$, $\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$, $\cos 2a = 1 - 2\sin^2 a$

c) $tg2a = \dfrac{2\cdot tga}{1 - tg^2 a}$ d) $ctg2a = \dfrac{ctg^2 a - 1}{2ctga}$

12) Formule pentru jumătatea unui unghi

$1 + \cos 2a = 2\cos^2 a$ $\cos^2 a = \dfrac{1+\cos 2a}{2}$

$1 - \cos 2a = 2\sin^2 a$ $\sin^2 a = \dfrac{1-\cos 2a}{2}$

$\left|\cos \dfrac{a}{2}\right| = \sqrt{\dfrac{1+\cos a}{2}}$; $\left|\sin \dfrac{a}{2}\right| = \sqrt{\dfrac{1-\cos a}{2}}$

13) Substituţia universală

$\sin a = \dfrac{2tg\frac{a}{2}}{1+tg^2\frac{a}{2}}$; $\cos a = \dfrac{1-tg^2\frac{a}{2}}{1+tg^2\frac{a}{2}}$; $tga = \dfrac{2tg\frac{a}{2}}{1-tg^2\frac{a}{2}}$

14) Transformarea produselor în sume

a) $\sin a \cdot \cos b = \dfrac{1}{2}\left(\sin(a+b) + \sin(a-b)\right)$

b) $\cos a \cdot \sin b = \dfrac{1}{2}\left(\sin(a+b) - \sin(a-b)\right)$

c) $\cos a \cdot \cos b = \dfrac{1}{2}\left(\cos(a+b) + \cos(a-b)\right)$

d) $\sin a \cdot \sin b = -\dfrac{1}{2}\left(\cos(a+b) - \cos(a-b)\right)$

15) Transformarea sumelor în produs

a) $\sin a+\sin b=2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$

b) $\sin a-\sin b=2\sin\frac{a-b}{2}\cos\frac{a+b}{2}$

c) $\cos a+\cos b=2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$

d) $\cos a-\cos b=-2\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}$

16) Teorema cosinusului: Oricare ar fi triunghiul ABC $\Rightarrow$ $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ şi analoagele.

17) Relaţia lui Stewart: Dacă A,B,C sunt coliniare, atunci $\forall M$ din plan avem:

$$MA^2\cdot BC-MB^2\cdot AC+MC^2\cdot AC=AB\cdot BC\cdot AC$$

18) Lungimea medianei Fie $\triangle ABC$ de laturi a,b,c şi AM mediană. Atunci $AM^2=\frac{2\left(b^2+c^2\right)-a^2}{4}$

19) Lungimea bisectoarei $AD=\frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2}$

20) Formulele lui Neper

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}},\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$$

$$tg\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}},ctg\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{(p-b)(p-c)}}$$

21) Teorema sinusurilor Oricare ar fi triunghiul ABC $\Rightarrow$

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$

22) Aria triunghiului (suprafaţa triunghiului)

$S=\dfrac{a\cdot h_a}{2}$ $\quad S=\dfrac{ab\sin C}{2}$ $\quad S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

$S=r\cdot p$ $\quad S=\dfrac{abc}{4R}$

unde $p=\dfrac{a+b+c}{2}$ semiperimetru, $r\rightarrow$raza cercului înscris,

$R\rightarrow$raza cercului circumscris

Obs.1: Aria triunghiului dreptunghic este: $S=\dfrac{c_1\cdot c_2}{2}$

Obs.2: Aria triunghiului echilateral este: $S=\dfrac{l^2\cdot\sqrt{3}}{4}$

Obs.3: Raportul ariilor a două figuri asemenea este egal cu pătratul raportului de asemănare

23) Deducerea razei cercului înscris şi a cercului circumscris

din formulele de arie se deduc $r=\dfrac{S}{p}, R=\dfrac{abc}{4S}$

24) Aria paralelogramului $ABCD$

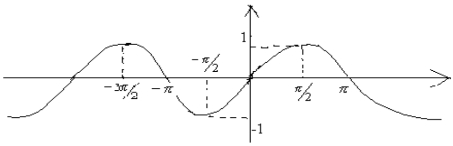
- se foloseşte că $A_{ABCD}=2\cdot A_{ABC}$, deci se deduce că

$$A_{ABCD}=a\cdot h_a=ab\sin C$$

Capitolul IV
FUNCŢII ŞI ECUAŢII TRIGONOMETRICE (X)

1) Trasarea graficului funcţiei $\sin$

a) $\sin:\mathbb{R}\to[-1,1]$



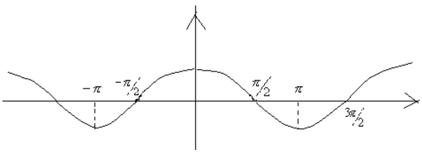
b) "sin" nu e bijectivă, alegem restricţia

$\overline{\sin}:\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]\to[-1,1]$

iar inversa acestei restricţii este $\arcsin:[-1,1]\to\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

2) Trasarea graficului funcţiei $\cos$

a) $\cos:\mathbb{R}\to[-1,1]$

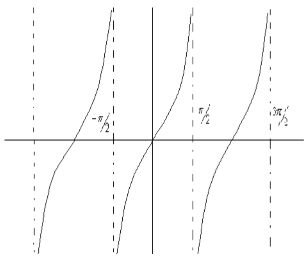


b) "cos" nu e bijectivă, alegem restricţia $\overline{\cos}:[0;\pi]\to[-1,1]$

iar inversa acestei restricţii este $\arccos:[-1,1]\to[0;\pi]$

3) Trasarea graficului funcţiei tg

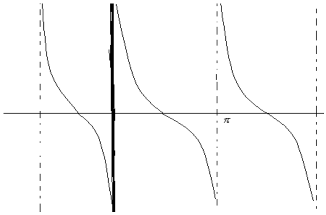
a) $tg:\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi \middle| k\in\mathbb{Z}\right\}\to\mathbb{R}$



b) "tg" nu e bijectivă, alegem restricţia $\overline{tg}:\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}$

iar inversa acestei restricţii este $\operatorname{arc}tg:\mathbb{R}\to\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$

4) Trasarea graficului funcţiei ctg



a) $ctg:\mathbb{R}\setminus\{kp \mid k\in\mathbb{Z}\}\to\mathbb{R}$

b) “ctg” nu e bijectivă, alegem restricţia $\overline{ctg}:(0,p)\to\mathbb{R}$

iar inversa acestei restricţii este $arcctg:\mathbb{R}\to(0;p)$

5) Compararea valorilor unor funcţii trigonometrice a căror argument este în grade (de exemplu, $\cos 1°, \cos 2°, \cos 3°$**)** - se face din cercul trigonometric

6) Compararea valorilor unor funcţii trigonometrice a căror argument este în radiani (de exemplu, $\cos 1, \cos 2, \cos 3$**)** - se face din graficul acelei funcţii, comparând semnul şi lungimea valorii funcţiei în aceste unghiuri

7) Calcularea valorilor funcţiilor trigonometrice inverse

$\arcsin x = y \Rightarrow x = \sin y$ $\arccos x = y \Rightarrow x = \cos y$

$\mathrm{arc}\,tgx = y \Rightarrow x = tg\ y$ $\mathrm{arc}\,ctgx = y \Rightarrow x = ctg\ y$

Obs.: trebuie ca valoarea obţinută să fie în codomeniul funcţiei inverse date, altfel o "aducem" acolo

8) Relaţie între o funcţie trigonometrică şi inversa sa

$\sin(\arcsin x) = x$ $\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$

$\cos(\arccos x) = x$ $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$

$tg\,(arctgx) = x$ $tg\,(arcctgx) = \dfrac{1}{x}$

$ctg\,(arcctgx) = x$ $\mathrm{ctg}\,(arctgx) = \dfrac{1}{x}$

9) Paritatea, imparitatea funcţiilor trigonometrice inverse

$\arcsin(-x) = -\arcsin x$ $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$

$\mathrm{arc}\,tg\,(-x) = -\mathrm{arc}\,tgx$ $\mathrm{arc}\,ctg\,(-x) = \pi - \mathrm{arc}\,ctg\ x$

10) Formule pentru funcţiile trigonometrice inverse

$$\text{arctg } a - \text{arctg } b = \text{arctg } \frac{a-b}{1+ab}$$

$$\text{arctg } a + \text{arctg } b = \text{arctg } \frac{a+b}{1-ab}$$

11) Ecuaţii trigonometrice fundamentale

a) $\sin x = a$ are soluţii doar dacă $a \in [-1,1]$

dacă $a \notin [-1,1] \Leftrightarrow x \in \varnothing$

dacă $a \in [-1,1] \Leftrightarrow x \in \{\arcsin a + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\pi - \arcsin a + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

Obs: Soluţia este echivalentă cu $x \in \left\{(-1)^k \arcsin a + k\pi \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\}$

b) $\cos x = a$ are soluţii doar dacă $a \in [-1,1]$

dacă $a \notin [-1,1] \Leftrightarrow x \in \varnothing$

dacă $a \in [-1,1] \Leftrightarrow x \in \{\arccos a + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{-\arccos a + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

Obs: Soluţia este echivalentă cu $x \in \{\pm \arccos a + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

c) $tgx = a$ are soluţii pentru orice $a \in \mathbb{R}$, soluţia este

$$x \in \{\text{arc}\,tga + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

d) $ctgx = a$ are soluţii pentru orice $a \in \mathbb{R}$, soluţia este

$$x \in \{\text{arc}\,ctga + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

12) Rezolvarea de ecuaţii date prin egalităţi de funcţii

a) $\sin f(x) = \sin g(x) \Rightarrow \left(f(x) = g(x) + 2k\pi \text{ sau } f(x) = \pi - g(x) + 2k\pi \right)$

b) $\cos f(x) = \cos g(x) \Rightarrow \left(f(x) = g(x) + 2k\pi \text{ sau } f(x) = -g(x) + 2k\pi \right)$

c) $tg\ f(x) = tg\ g(x) \Rightarrow f(x) = g(x) + k\pi$

d) $ctg\ f(x) = ctg\ g(x) \Rightarrow f(x) = g(x) + k\pi$

Obs.: Ecuaţia $\sin f(x) = \cos g(x) \Rightarrow \sin f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - g(x)\right)$

13) Rezolvarea ecuaţiei de tipul $a\sin x + b\cos x = c$

metoda I (nu e generală, dar e mai simplă)

- se împarte prin $\sqrt{a^2+b^2}$
- se obţine $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$
- dacă valorile $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ şi $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ sunt din tabelul trigonometric,

înlocuim cu $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos t$, respectiv $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin t$

- obţinem $\sin(x+t) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$

metoda II: - se rezolvă sistemul $\begin{cases} a\sin x + b\cos x = c \\ \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \end{cases}$

Obs.: la metoda a II-a, nu toate valorile lui x obţinute sunt soluţii pentru ecuaţia iniţială, pentru a fi soluţii, trebuie verificate în ecuaţia iniţială.

Capitolul V
MULŢIMI DE NUMERE, ECUAŢII (IX)

1) Mulţimi de numere:

a) Numere naturale - se notează cu $\mathbb{N}$ şi $\mathbb{N}=\{0;1;2;3;......\}$

b) Numere întregi - se notează cu $\mathbb{Z}$ şi $\mathbb{Z}=\{....;-2;-1;0;1;2;......\}$

c) Numere raţionale se notează $\mathbb{Q}=\left\{\frac{a}{b};a,b\in\mathbb{Z},b\neq 0\right\}$ sau

$\mathbb{Q}=\{\text{fracţii zecimale ce se pot scrie cu un număr finit de zecimale}\}$

Obs.: fracţiile zecimale periodice sunt numere raţionale.

d) Numere reale - se notează cu $\mathbb{R}$ şi conţine toate numerele

e)Numere iraţionale $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ sunt numerele reale care nu sunt raţionale (au o infinitate de zecimale), sunt de fapt fracţii zecimale infinite şi neperiodice

2) Intervale de numere reale, operaţii cu intervale

- un interval din $\mathbb{R}$ - este mulţimea tuturor numerelor reale cuprinse între capetele intervalului, este o "bucată din axa numerelor", se notează: $[a;b]$, $(a;b)$, $[a;b)$ sau $(a;b]$

a) reuniunea: $I_1\cup I_2=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x\in I_1 \text{ sau } x\in I_2\}$

b) intersecţia: $I_1\cap I_2=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x\in I_1 \text{ şi } x\in I_2\}$

c) diferenţa: $I_1\setminus I_2=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x\in I_1 \text{ şi } x\notin I_2\}$

3) Rezolvarea ecuaţiei de gradul II: $ax^2+bx+c=0, a\neq 0$

Calculăm $\Delta=b^2-4ac$

Dacă $\Delta>0\Rightarrow$ ecuaţia are rădăcini reale $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$

Dacă $\Delta=0\Rightarrow x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$

Dacă $\Delta<0\Rightarrow$ ecuaţia nu are rădăcini reale

4) Condiţii pentru ecuaţia de gradul II

- o ecuaţie de gradul II are rădăcini reale $\Leftrightarrow \Delta \geq 0$
- o ecuaţie de gradul II are rădăcini reale distincte $\Leftrightarrow \Delta > 0$
- o ecuaţie de gradul II are rădăcini reale egale $\Leftrightarrow \Delta = 0$
- o ecuaţie de gradul II nu are rădăcini reale $\Leftrightarrow \Delta < 0$

5) Condiţia ca două ecuaţii de gradul II să aibă aceleaşi rădăcini este ca: $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$

6) Rezolvarea ecuaţiilor de grad superior ($grad > 2$). Schema lui Horner

E1) dacă ecuaţia nu are termen liber, se dă factor comun x la cea mai mică putere dintre cele care apar

E2) dacă ecuaţia are termen liber, se calculează $D_{\text{termen liber}}$ adică divizorii termenului liber

E3) se face schema lui Horner pentru $X - d$, unde d este divizor, până obţinem restul 0, celelalte linii se taie.

E4) Schema lui Horner presupune trei linii. Pe prima linie se pun în ordine descrescătoare puterile lui X, pe cea de-a doua coeficienţii, iar pe cea de-a treia, primul coeficient se copiază, se înmulţeşte cu rezultatul, se adună în diagonală; repetăm procedeul şi ultimul rezultat este restul, iar celelalte sunt coeficienţii câtului, de grad cu 1 mai mic decât împărţitorul;

E5) Ecuaţia devine

$(X - d)(\text{câtul obţinut}) = 0 \Rightarrow x = d$ sau $(\text{câtul obţinut}) = 0$

Obs.1 : Dacă cea de-a doua paranteză are gradul mai mare decat 2 , o descompunem din nou cu Horner

Obs.2: Dacă nu obţinem rădăcini cu metoda de mai sus, încercăm schema lui Horner pentru $D = \frac{D_{\text{termen liber}}}{D_{\text{coeficient termen de grad maxim}}}$

7) Inecuaţii de gradul I rezolvate cu tabelulul de semne

E1) se rezolvă ecuaţia $\Rightarrow x = ...$

E2) se alege x corespunzător din tabelul :

x		x_0	
$ax+b$	$-\mathrm{sgn}(a)$	0	$\mathrm{sgn}(a)$

unde $\mathrm{sgn}(a)$ înseamnă "semnul lui *a*"

8) Inecuaţii de gradul II rezolvate cu tabelul de semne

se rezolvă ecuaţia: $\Rightarrow x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ unde $\Delta = b^2 - 4ac$

E2) se alege linia corespunzătoare cazului nostru din tabelul

x		x_1		$x_1 = x_2$		x_2	
$\Delta > 0$	$\mathrm{sgn}(a)$	0	$-\mathrm{sgn}(a)$			0	$\mathrm{sgn}(a)$
$\Delta = 0$	$\mathrm{sgn}(a)$			0	$\mathrm{sgn}(a)$		
$\Delta < 0$				$\mathrm{sgn}(a)$			

9) Inecuaţii cu fracţii şi cu produse folosind expresii de grad I, de grad II sau de grad superior

E1) se trec toţi termenii în partea stângă

E2) se face tabel de semne, găsim semnul factorilor de grad I sau grad II (dacă avem factori de grad >2, descompunem cu Horner)

E3) se face tabel de semne folosind $\dfrac{a}{0} = \backslash$, $\dfrac{0}{0} = \backslash$, $\dfrac{0}{a} = 0$, $\forall a \neq 0$,

$a \cdot 0 = 0, \quad 0 \cdot 0 = 0, \quad 0 \cdot a = 0$

10) Condiţia ca o funcţie de gradul II să păstreze acelaşi semn, $\forall x \in \mathbb{R}$

a) $ax^2 + bx + c > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$

b) $ax^2 + bx + c < 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$

c) $ax^2 + bx + c \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$

d) $ax^2 + bx + c \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$

11) Proprietăţi ale modulului: fie *c* un număr real

$a)\ |x| \geq 0, \forall x \in \mathbb{R};$ $b)\ |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0;$

$c)\ |x| + |y| = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$ $d)\ |x| = |y| \Leftrightarrow x = \pm y$

$e)\ |x| < c, c > 0 \Leftrightarrow x \in (-c; c);$ $|x| > c, c > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -c) \cup (c; \infty)$

$|x| < c, c < 0 \Leftrightarrow x \in \varnothing$ $|x| > c, c < 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$

$f)\ |x+y| \leq |x| + |y|;$ $g)\ |x \cdot y| = |x| \cdot |y|$ şi $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}, y \neq 0$

Exp.1: $|a| < 2 \Leftrightarrow a \in (-2; 2);$ $|a| > 2 \Leftrightarrow a \in (-\infty; -2) \cup (2; \infty)$

$|a| < -2 \Leftrightarrow a \in \varnothing$ $|a| > -2 \Leftrightarrow a \in \mathbb{R}$

Exp.2: $|2x-1| < 3 \Leftrightarrow 2x-1 \in (-3; 3) \Leftrightarrow 2x \in (-2; 4) \Leftrightarrow x \in (-1; 2)$

12) Ecuaţii cu module

E1) se egalează cantitatea din fiecare modul cu 0
E2) se face tabelul de semne
E3) se discută pe cazuri, se alege soluţia care este în cazul respectiv, vom obţine $S_I, S_{II}, ...$

Cantitatea I modul	Semne corespunzatoare
Cantitatea II modul	Semne corespunzatoare

E4) soluţia finală este $S_f = S_I \cup S_{II} \cup ...$

13) Inecuaţii cu module

E1) se egalează cantitatea din fiecare modul cu 0
E2) se face tabelul de semne
E3) se discută pe cazuri, se intersectează soluţia cu intervalul în care ne situăm, vom obţine $S_I, S_{II}, ...$

Cantitatea I modul	Semne corespunzatoare
Cantitatea II modul	Semne corespunzatoare

E4) soluţia finală este $S_f = S_I \cup S_{II} \cup ...$

14) Parte întreagă – primul întreg mai mic sau egal decât numărul nostru, se notează $[x]$(şi este primul întreg din stânga numărului)

Parte fracţionară : se notează $\{x\}$, $\{x\} = x - [x]$

15) Proprietăţi pentru parte întreagă şi parte fracţionară:

$a)[x] = x$ d.d. $x \in \mathbb{Z}$; $b)\{x\} \in [0;1)$

$c)\{x\} = 0$ d.d. $x \in \mathbb{Z}$; $d)[m+x] = m + [x], \forall m \in \mathbb{Z}$;

$e)\{m+x\} = \{x\}, \forall m \in \mathbb{Z}$; $f)x-1 < [x] \le x < [x]+1$;

16) Ecuaţii cu parte întreagă de tipul $[f(x)] = g(x)$

E1) notăm $[f(x)] = k \in \mathbb{Z} \Rightarrow g(x) = k$

E2) din $g(x) = k \Rightarrow x = ...$ în funcţie de k

E3) folosim $[f(x)] \le f(x) < [f(x)] + 1 \Rightarrow k \le f(x) < k+1$

E4) înlocuim x din E2) în funcţie de $k \Rightarrow$ inecuaţie cu k

E5) se aleg din intervalul de soluţii doar valorile întregi ale lui k, apoi revenim la notaţia de la E2) şi găsim pe x

17) Identitatea lui Hermite

$$[x] + \left[x + \frac{1}{n}\right] + \left[x + \frac{2}{n}\right] + ... + \left[x + \frac{n-1}{n}\right] = [nx]$$

Exp.: $[x] + \left[x + \frac{1}{2}\right] = [2x]$ $\quad [x] + \left[x + \frac{1}{3}\right] + \left[x + \frac{2}{3}\right] = [3x]$

Obs.: identitatea lui Hermite se poate folosi la rezolvarea ecuaţiilor, de exemplu:

$[x] + \left[x + \frac{1}{4}\right] + \left[x + \frac{1}{2}\right] = 8 + \left[x + \frac{3}{4}\right]$ sau $\left[\frac{x+1}{3}\right] + \left[\frac{2x+5}{6}\right] = \frac{3x-5}{2}$

18) Formule de calcul prescurtat:

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ $\quad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(-a+b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ $\quad (-a-b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$$\left(a+b+c\right)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$$

$$\left(a+b-c\right)^2=a^2+b^2+c^2+2ab-2ac-2bc$$

$$a_1^2+a_2^2+...a_n^2=\left(a_1+a_2+...a_n\right)^2-2\left(a_1a_2+a_1a_3+...a_{n-1}a_n\right)$$

$$\left(a+b\right)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \qquad \left(a+b\right)^3=a^3+b^3+3ab\left(a+b\right)$$

$$\left(a-b\right)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3 \qquad \left(a-b\right)^3=a^3-b^3-3ab\left(a-b\right)$$

$$a^2-b^2=\left(a-b\right)\left(a+b\right)$$

$$a^3-b^3=\left(a-b\right)\left(a^2+ab+b^2\right) \qquad a^3+b^3=\left(a+b\right)\left(a^2-ab+b^2\right)$$

$$a^n-b^n=\left(a-b\right)\left(a^{n-1}+a^{n-2}b....+b^{n-1}\right),\forall n\in\mathbb{N}$$

$$a^n+b^n=\left(a+b\right)\left(a^{n-1}-a^{n-2}b+....+b^{n-1}\right),\forall n\in 2\mathbb{N}+1$$

$$a^3+b^3+c^3-3abc=\left(a+b+c\right)\left(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac\right)$$

19) Inegalităţi evidente:

a)Dacă $a\cdot b>0\Rightarrow\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2$

b) $x^2+y^2+z^2\geq xy+yz+zx,\forall x,y,z\in\mathbb{R}$

20) Inegalitatea mediilor (valabilă pentru numere pozitive):

$\min(a_k)\leq m_h\leq m_g\leq m_a\leq m_p\leq\max(a_k)$ unde

$m_h=\dfrac{n}{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}}$ armonică $\qquad m_g=\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}a_k}$ geometrică

$m_a=\dfrac{\sum_{k=1}^{n}a_k}{n}$ aritmetică $\qquad m_p=\sqrt{\dfrac{\sum_{k=1}^{n}{a_k}^2}{n}}$ pătratică

Obs.1:Egalitate are loc d.d.toate numerele sunt egale

Obs.2: Cea mai des folosită este $a_1+...+a_n\geq n\cdot\sqrt[n]{a_1\cdot...\cdot a_n}$

Capitolul VI
SUME, INDUCŢIE. ŞIRURI. PROGRESII (IX)

1) Suma puterilor primelor „n” numere naturale

$$\sum_{k=1}^{n} 1 = n \qquad \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

Obs.: e valabilă distributitatea sumei: $\sum_{k=1}^{n}(ax_k + by_k) = a\sum_{k=1}^{n} x_k + b\sum_{k=1}^{n} y_k$

și a produsului: $\prod_{k=1}^{n}(x_k y_k) = \left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)\cdot\left(\prod_{k=1}^{n} y_k\right)$

2) Calcularea sumelor de tipul

$$S = \frac{1}{2\cdot 7} + \frac{1}{7\cdot 12} + \ldots + \frac{1}{(5n+2)\cdot(5n+7)}$$

- se descompune numărătorul ca sumă de numitori, și se dă factor comun pentru a nu schimba rezultatul

$$S = \frac{1}{5}\left(\frac{7-2}{2\cdot 7} + \frac{12-7}{7\cdot 12} + \ldots + \frac{(5n+7)-(5n+2)}{(5n+2)\cdot(5n+7)}\right)$$

3) Egalităţi demonstrate prin inducţie:

I) $P(\text{prima valoare posibilă})$ adevărată

II) Presupunem adevărată $\Rightarrow$ $P(k+1)$ adevărată

unde $P(k): \ldots$

$P(k+1): \ldots.$

Ştim $P(k)$, construim termenul cu puncte, puncte din $P(k+1)$.

E suficient să arătăm că ceea ce obţinem mai sus este egal cu termenul celălalt din $P(k+1)$

4) Inducţia cu pasul 2

I. Se arată că primele 2 valori sunt adevărate

II. Presupunem $P(k), P(k+1)$ adevărate şi demonstrăm $P(k+2)$

Ştim $P(k)$ şi $P(k+1)$ adevărate, construim $P(k+2)$ şi este asemănătoare inducţiei clasice (numite şi inducţie cu pas 1)

5) Inegalităţi demonstrate prin inducţie:

pot să fie de tipul $f(n) > g(n)$, respectiv $f(n) < g(n)$

Etapa I e ca la egalităţi, diferă doar etapa a II-a astfel:

ştim $P(k)$, construim termenul cu puncte, puncte din $P(k+1)$. E suficient să arătăm că ceea ce obţinem mai sus este mai mare sau egal cu termenul celălalt din $P(k+1)$, respectiv mai mic sau egal cu acel termen

6) Divizibilitate demonstrată prin inducţie:

pot să fie de tipul $f(n) \vdots \alpha$, unde $\alpha \in \mathbb{N}$, diferă doar pasul III astfel:

III) din $P(k)$ adevărată , $\exists c \in \mathbb{Z}$ astfel încât $f(k) = \alpha \cdot c$, găsim apoi cea mai mare putere a lui k în funcţie de c, o înlocuim în $P(k+1)$ şi arătăm că $P(k+1)$ e adevărată.

7) Demonstrarea monotoniei unui şir:

Met I: Criteriul diferenţei – calculăm diferenţa $x_{n+1} - x_n$ şi dacă:

$$x_{n+1} - x_n > 0 \Leftrightarrow x_{n+1} > x_n \Leftrightarrow x_n \ s \nearrow$$

$$x_{n+1} - x_n < 0 \Leftrightarrow x_{n+1} < x_n \Leftrightarrow x_n \ s \searrow$$

$$x_{n+1} - x_n \geq 0 \Leftrightarrow x_{n+1} \geq x_n \Leftrightarrow x_n \nearrow$$

$$x_{n+1} - x_n \leq 0 \Leftrightarrow x_{n+1} \leq x_n \Leftrightarrow x_n \searrow$$

Met II: Criteriul raportului – valabil doar pentru şiruri cu toţi termenii pozitivi, calculăm raportul $\frac{x_{n+1}}{x_n}$ şi dacă

$\frac{x_{n+1}}{x_n} > 1 \Leftrightarrow x_{n+1} > x_n \Leftrightarrow x_n\ s \nearrow$ $\frac{x_{n+1}}{x_n} < 1 \Leftrightarrow x_{n+1} < x_n \Leftrightarrow x_n\ s \searrow$

$\frac{x_{n+1}}{x_n} \geq 1 \Leftrightarrow x_{n+1} \geq x_n \Leftrightarrow x_n \nearrow$ $\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq 1 \Leftrightarrow x_{n+1} \leq x_n \Leftrightarrow x_n \searrow$

8) Demonstrarea mărginirii unui şir: - se dau valori, se intuiesc capetele, se arată că $x_n \in [\alpha; \beta]$

9) Termenul general al unei progresii aritmetice:

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r.$$

10) Condiţia ca trei numere a, b, c să fie termenii consecutivi ai unei progresii aritmetice: $a + c = 2b$

11) Metode de a demonstra că a_n este progresie aritmetică

arătăm că $a_{n-1} + a_{n+1} = 2a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$;

12) Suma primilor n termeni ai unei progresii aritmetice:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

13) Termenul general al unei progresii geometrice:

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}.$$

14) Condiţia ca trei numere a, b, c să fie termenii consecutivi ai unei progresii geometrice: $a \cdot c = b^2$

15) Metode de a demonstra că b_n este progresie geometrică

arătăm că $b_{n-1} \cdot b_{n+1} = b_n^2$, $\forall n \in \mathbb{N}$;

16) Suma primilor n termeni ai unei progresii geometrice:

$$S_n = \begin{cases} \frac{b_1(q^n - 1)}{q-1}; \text{ dacă } q \neq 1 \\ b_1 \cdot n; \text{ dacă } q = 1 \end{cases}$$

Capitolul VII
FUNCŢII (IX)

1) Definiţia produsului cartezian a 2 mulţimi

$$A\times B=\{(x,y)\,|\,x\in A \text{ şi } y\in B\}$$

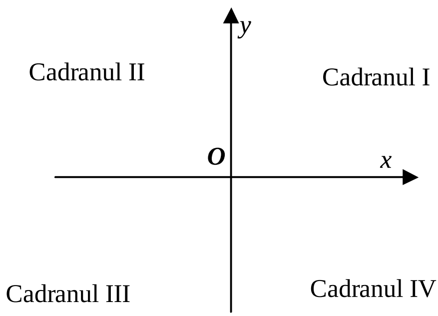
Exp.: $A=\{2,3,5\}, B=\{3,4,5\},$

$\Rightarrow A\times B=\{(2,3),(2,4),(2,5),(3,3),(3,4),(3,5),(5,3),(5,4),(5,5)\}$

2) Sistemul cartezian, semnele cadranelor

- axa absciselor este axa Ox
- axa ordonatelor este axa Oy

Dacă avem un punct $M(x_M, y_M)$ rezultă că abscisa punctului M este x_M iar ordonata punctului M este y_M



$M(x,y)\in Cd.\mathrm{I}\Rightarrow\begin{cases}x_M>0\\ y_M>0\end{cases}$ $M(x,y)\in Cd.\mathrm{II}\Rightarrow\begin{cases}x_M<0\\ y_M>0\end{cases}$

$M(x,y)\in Cd.\mathrm{III}\Rightarrow\begin{cases}x_M<0\\ y_M<0\end{cases}$ $M(x,y)\in Cd.\mathrm{IV}\Rightarrow\begin{cases}x_M>0\\ y_M<0\end{cases}$

3) Funcţii periodice: $f:A\to B$ **este o funcţie periodică** $\Leftrightarrow \exists T>0$ astfel încât $f(x+T)=f(x), \forall x\in A$

Obs.: perioada principală a funcţiei f este cel mai mic T_0 pozitiv

4) Funcţii pare, funcţii impare

$f:A\to B$ **este o funcţie pară** $\Leftrightarrow$

A mulţime simetrică şi $f(-x)=f(x), \forall x\in A$

$f:A\to B$ **este o funcţie impară** $\Leftrightarrow$

A mulţime simetrică şi $f(-x)=-f(x), \forall x\in A$

5) Explicitarea funcţiilor date prin minim sau maxim

E1) se egalează pe rând două câte două dintre funcţii, se găsesc soluţiile

E2) se face tabel de explicitare

E3) se dau valori lui *x* pe fiecare interval determinat de soluţiile de mai sus, se găseşte min sau max pe fiecare interval

E3)se scrie funcţia cerută cu acolade

6) Compunere de funcţii simple şi cu acoladă

a) $(f\circ g)(x)=f(g(x))$ şi de obicei se înlocuieşte funcţia din interior, adică $g(x)$, apoi în f înlocuim pe x cu $g(x)$. Sunt însă şi situaţii când prima dată înlocuim în f pe *x* cu $g(x)$, apoi înlocuim cu expresia lui dar rezultatul va fi acelaşi

b) dacă avem f şi g funcţii cu acolade, atunci

$$f(x)=\begin{cases} f_1(x), x\in I_1 \\ f_2(x), x\in I_2 \end{cases} \text{ şi } g(x)=\begin{cases} g_1(x), x\in J_1 \\ g_2(x), x\in J_2 \end{cases}$$

Atunci se deduce că $(f\circ g)(x)=\begin{cases} f_1(g_1(x)), x\in J_1 \text{ şi } \mathrm{g}(x)\in I_1 \\ f_2(g_1(x)), x\in J_1 \text{ şi } \mathrm{g}(x)\in I_2 \\ f_1(g_2(x)), x\in J_2 \text{ şi } \mathrm{g}(x)\in I_1 \\ f_2(g_2(x)), x\in J_2 \text{ şi } \mathrm{g}(x)\in I_2 \end{cases}$

şi că $(g\circ f)(x)=\begin{cases} g_1(f_1(x)), x\in I_1 \text{ şi } \mathrm{g}(x)\in J_1 \\ g_2(f_1(x)), x\in I_1 \text{ şi } \mathrm{g}(x)\in J_2 \\ g_1(f_2(x)), x\in I_2 \text{ şi } \mathrm{g}(x)\in J_1 \\ g_2(f_2(x)), x\in I_2 \text{ şi } \mathrm{g}(x)\in J_2 \end{cases}$

7) Graficul funcţiei $f(x)=ax+b$ este o dreaptă, şi se trasează sau dând două valori, sau calculând intersecţia cu axele

8) Graficul funcţiei de gradul II se numeşte parabolă, şi se trasează ţinând cont de semnul lui *a*, de intersecţia cu axele, de coordonatele vârfului, $V\left(-\frac{b}{2a};-\frac{\Delta}{4a}\right)$ şi de faptul că $x=-\frac{b}{2a}$ este axă de simetrie

9) Găsirea punctelor fixe ale unei familii de parabole

E1) se notează $f(x)=y$, se trece totul în stânga şi se ordonează în funcţie de *m* obţinând $m(......)+......=0,\forall m\in\mathbb{R}$

E2) rezolvăm sistemul $\begin{cases}(......)=0\\ ......=0\end{cases}$ de unde obţinem coordonatele punctelor fixe

10) Situarea rădăcinilor funcţiei de gradul II în funcţie de parametri

E1) se face sistemul de axe, se situează toţi parametri care apar
E2) se trasează graficul cu ramurile în sus
E3) se pun cele trei tipuri de condiţii:
de tip Δ, de tip $a\cdot f(nr.)$ şi de tip $-\frac{b}{2a}$

11) Condiţii de intersecţie ale graficelor funcţiilor şi găsirea punctelor de intersecţie

a) Condiţia ca graficele a două funcţii să aibă un singur punct comun (să fie tangente) este ca ecuaţia $f(x)=g(x)$ să aibă soluţie unică. Dacă se cere punctul de intersecţie, înlocuim valoarea lui *x* găsită în $f(x)$ sau în $g(x)$ şi găsim valoarea lui *y*.

b) Condiţia ca graficele a două funcţii să aibă două sau mai multe puncte de intersecţie (să fie secante) este ca ecuaţia $f(x)=g(x)$ să aibă două sau mai multe soluţii. Dacă se cer punctele de intersecţie, înlocuim valorile lui *x* găsite în $f(x)$ sau în $g(x)$ şi găsim valorile lui *y*.

c) Condiţia ca graficele a două funcţii să nu se intersecteze este ca ecuaţia $f(x)=g(x)$ să nu aibă soluţii

d) Condiţia ca graficul unei funcţii de gradul II să intersecteze axa Ox într-un singur punct (să fie tangent axei Ox) este ca $\Delta = 0$, apoi găsim valoarea lui *x* corespunzătoare.

e) Condiţia ca graficul unei funcţii de gradul II să intersecteze axa Ox în două puncte distincte (să fie secant axei Ox) este ca $\Delta > 0$

f) Condiţia ca graficul unei funcţii de gradul II să nu intersecteze axa Ox este ca $\Delta < 0$

g) punctul de intersecţie al unei funcţii cu axa Ox: se rezolvă ecuaţia $f(x) = 0$, se găseşte x şi vom avea punctul $M(...,0)$

h) punctul de intersecţie al unei funcţii cu axa Oy: se face $x = 0 \Rightarrow f(0) = ...$, se găseşte $f(0)$ şi vom avea punctul $M(0,...)$

12) Metode de a demonstra monotonia funcţiilor

metoda I: criteriul diferenţei

$\forall x_1 < x_2$, calculăm $f(x_1) - f(x_2)$ şi-l comparăm cu 0.

dacă din $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) - f(x_2) < 0 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow f_s \nearrow$

dacă din $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) - f(x_2) \le 0 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2) \Rightarrow f \nearrow$

dacă din $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) - f(x_2) > 0 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \Rightarrow f_s \searrow$

dacă din $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) - f(x_2) \ge 0 \Rightarrow f(x_1) \ge f(x_2) \Rightarrow f \searrow$

metoda II: folosind raportul de variaţie

$\forall x_1 \ne x_2$, calculăm $R(x_1, x_2) = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ şi-l comparăm cu 0.

dacă $R(x_1, x_2) > 0 \Rightarrow f_s \nearrow$ dacă $R(x_1, x_2) \ge 0 \Rightarrow f \nearrow$

dacă $R(x_1, x_2) < 0 \Rightarrow f_s \searrow$ dacă $R(x_1, x_2) \le 0 \Rightarrow f \searrow$

Obs.: Proprietăţi ale monotoniei funcţiilor

$f_s \nearrow, g_s \nearrow \Rightarrow (f+g)_s \nearrow$ $f_s \searrow, g_s \searrow \Rightarrow (f+g)_s \searrow$

13) Monotonia funcţiei de gradul I: Fie $f(x) = ax + b$

$a > 0 \Rightarrow f_s \nearrow$; $a = 0 \Rightarrow f$ constantă ; $a < 0 \Rightarrow f_s \searrow$;

14) Monotonia funcţiei de gradul II:

Fie $f\left(x\right)=ax^2+bx+c, a\neq 0$, din grafic deducem:

dacă $a>0 \Rightarrow f_s \searrow$ pe $\left(-\infty,-\dfrac{b}{2a}\right]$ şi $f_s \nearrow$ pe $\left[-\dfrac{b}{2a},\infty\right)$

dacă $a<0 \Rightarrow f_s \nearrow$ pe $\left(-\infty,-\dfrac{b}{2a}\right]$ şi $f_s \searrow$ pe $\left[-\dfrac{b}{2a},\infty\right)$

15) Maximul sau minimul funcţiei de gradul II.

Fie $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}, f\left(x\right)=ax^2+bx+c, a\neq 0$. Atunci, din grafic avem:

$a>0 \Rightarrow f$ are minim egal cu $-\dfrac{\Delta}{4a}$, minim ce se obţine când $x=-\dfrac{b}{2a}$

$a<0 \Rightarrow f$ are maxim egal cu $-\dfrac{\Delta}{4a}$, maxim ce se obţine când $x=-\dfrac{b}{2a}$

16) Imaginea unei funcţii sau a unui interval printr-o funcţie de gradul I sau gradul II

E1) se studiază monotonia, se face tabel ataşat funcţiei, dacă e funcţie de gradul II situăm şi vârful

E2) imaginea cerută este reuniunea tuturor intervalelor de pe linia funcţiei *f* pe care funcţia *f* este strict monotonă

17) Imaginea unei funcţii de tipul $f(x)=\dfrac{ax^2+bx+c}{dx^2+ex+f}$

E1) se notează $f(x)=y$, se înmulţeşte în diagonală, apoi se ordonează în funcţie de *x* obţinând $\left(......\right)x^2+\left(.....\right)x+......=0$

E2) deoarece $x\in\mathbb{R}$, punem condiţia ca $\Delta_x \geq 0$ şi vom obţine $y\in I$, deci $\operatorname{Im} f=I$

18) Forma canonică a funcţiei de grad II

Dacă $f(x)=ax^2+bx+c, a\neq 0$ atunci se poate deduce scrierea funcţiei sub forma sa canonică, $f(x)=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{\Delta}{4a}$

19) Relaţiile lui Viete

Având ecuaţia $ax^2+bx+c=0$, din formula rădăcinilor se deduc relaţiile lui Viete: $\begin{cases} S=x_1+x_2=-\dfrac{b}{a} \\ P=x_1x_2=\dfrac{c}{a} \end{cases}$

20) Determinarea relaţiei independente de *m* între rădăcini

E1) se scrie $\begin{cases} S=-\dfrac{b}{a} \\ P=\dfrac{c}{a} \end{cases}$ în funcţie de parametrul *m*

E2) se găseşte m din S sau din P (din care e mai simplă) şi se înlocuieşte în cealaltă obţinându-se o relaţie între S şi P, independentă de m

E3) se înlocuieşte $S=x_1+x_2$ şi $P=x_1x_2$ şi obţinem relaţia cerută

21) Ecuaţia ataşată

$x^2-Sx+P=0$, care se foloseşte atunci când ştim rădăcinile.

22) Descompunerea polinomului de gradul II în factori

Dacă $f=ax^2+bx+c$, atunci îl putem descompune în factori astfel:

$$\Delta>0 \Rightarrow f=a(x-x_1)(x-x_2)$$

$$\Delta=0 \Rightarrow f=a(x-x_1)^2$$

$$\Delta<0 \Rightarrow f \quad \text{ireductibil}$$

23) Determinarea sumei puterilor asemenea a rădăcinilor unei ecuaţii de grad II în funcţie de S şi P.

Se deduce, folosind formulele de calcul prescurtat că

$$x_1^2+x_2^2=S^2-2P \qquad x_1^3+x_2^3=S^3-3PS$$

$$x_1^4+x_2^4=\left(S^2-2P\right)^2-2P^2 \qquad |x_1-x_2|=\sqrt{S^2-4P}$$

24) Calcularea expresiilor simetrice referitoare la cele două rădăcini

E1) se foloseşte că x_1 este rădăcină a ecuaţiei $ax^2+bx+c=0$, deci $ax_1^2+bx_1+c=0 \Rightarrow x_1^2=\dfrac{-bx_1-c}{a}$, analog $x_2^2=\dfrac{-bx_2-c}{a}$

E2) se calculază eventualele puteri ale rădăcinilor mai mari decât 2 în funcţie de puteri de ordinul 1

E3) se obţine expresia ce depinde doar de puteri ale rădăcinilor de ordinul 1, se aduce la acelaşi numitor

E4) se scrie expresia în funcţie de S şi P, se calculează S şi P, apoi se înlocuiesc valorile obţinute

25) Sisteme simetrice -un sistem simetric este un sistem la care toate ecuaţiile sunt simetrice, unde o ecuaţie simetrică înseamnă că dacă schimbăm x cu y, ecuaţia este aceeaşi

E1) se folosesc formulele pentru suma puterilor asemenea

E2) se obţine un sistem cu S şi P, se obţine $S=...,P=...$

E3) se formează ecuaţia ataşată de grad II : $\mathrm{t}^2-\mathrm{St}+\mathrm{P}=0$

$$\Rightarrow \begin{cases} t_1=x \\ t_2=y \end{cases} \quad \text{sau} \quad \begin{cases} t_1=y \\ t_2=x \end{cases}$$

Obs.: orice sistem simetric ce are soluţia (α,β) are şi soluţia (β,α)

26) Sisteme omogene - un sistem omogen este un sistem la care toate ecuaţiile sunt omogene, unde o ecuaţie omogenă înseamnă că toţi termenii au acelasi grad, consideraţi în ambele necunoscute

E1) notăm $y=t\cdot x$, înlocuim în ambele ecuaţii, dăm factor comun

$x^{\cdots\cdots}(....)=...$

E2) dacă vreuna din cele 2 ecuaţii are termenul liber 0 $\Rightarrow x=0$ sau $(...)=0\Rightarrow t=...$

Dacă ambii termeni liberi sunt diferiţi de 0, împărţim cele 2 ecuaţii, simplificăm $\mathrm{x}^{\cdots}\Rightarrow$ t =…

E3) *Caz I:* $t_1=...\Rightarrow y=.....x$, înlocuim în cea mai simplă ecuaţie $\Rightarrow$ soluţiile

Caz II: $t_1=...\Rightarrow y=.....x$, etc.

Capitolul VIII
RADICALI, LOGARITMI (X)

1) Radicali de ordin superior: $\sqrt[a]{x^b}=x^{\frac{b}{a}}$

Obs.: $\sqrt[3]{x^6}=x^{\frac{6}{3}}=x^2$

Obs.: radicalul de ordin par se poate extrage doar din numere pozitive şi rezultatul e un număr pozitiv, iar radicalul de ordin impar se poate extrage din numere atât pozitive cât şi negative, iar rezultatul poate fi pozitiv sau negativ.

2) Condiţii pentru radicali

a) dacă apar radicali de ordin par, $\sqrt[2k]{f(x)}=g(x)$

Condiţii: $\begin{cases} f(x)\geq 0 \Rightarrow x\in I_1 \\ g(x)\geq 0 \Rightarrow x\in I_2 \end{cases} \Rightarrow I_c=I_1\cap I_2$

b) dacă apar radicali de ordin impar, $\sqrt[2k+1]{f(x)}=g(x)$

Condiţii: $x\in\mathbb{R}$

3) Compararea radicalilor de ordin diferit – se aduc radicalii la ordinul celui mai mic multiplu comun al ordinelor radicalilor iniţiali şi se compară numerele din interior, folosind formula $\sqrt[a]{x^b}=\sqrt[a\cdot n]{x^{b\cdot n}}$

Obs: Se utilizează doar dacă A^2-B este pătrat perfect

4) Formula radicalilor dubli (compuşi)

$$\sqrt{A\pm\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}}\pm\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}$$

5) Calcularea sumei de doi radicali de ordin 3 conjugaţi:

E1) notăm $N=\sqrt[3]{a+\sqrt{b}}\pm\sqrt[3]{a-\sqrt{b}}$

E2) ridicăm la puterea a 3-a folosind formulele restrânse

E3) înlocuim $\sqrt[3]{a+\sqrt{b}}\pm\sqrt[3]{a-\sqrt{b}}=N$, apoi schema lui Horner

6) Proprietăţi ale puterilor: $a) a^0 = 1, a \neq 0;$

$b) 0^a = 0, a \neq 0$ $c) a^{-x} = \frac{1}{a^x};$

$d) a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ $e) \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$ $f) \left(a^x\right)^y = a^{x \cdot y}$

$g) (a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$ $h) \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$

$$i) \begin{cases} a \in (0,1) \text{ atunci } \left(a^x < a^y \Leftrightarrow x > y\right) \\ a \in (1,\infty) \text{ atunci } \left(a^x < a^y \Leftrightarrow x < y\right) \end{cases}$$

$j) \nexists\, 0^0$

7) Proprietăţi ale radicalilor:

$a) \sqrt[2k]{x^{2k}} = |x|$ $b) \sqrt[2k+1]{x^{2k+1}} = x$ $c) \sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[n \cdot m]{x}$

$d) \sqrt[n]{x} = \sqrt[n \cdot m]{x^m}$ $e) \sqrt[2k]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[2k]{|x|}}{\sqrt[2k]{|y|}}$ si $\sqrt[2k]{xy} = \sqrt[2k]{|x|} \cdot \sqrt[2k]{|y|}$

$f) x^{2k} = y^{2k} \Rightarrow |x| = |y|$ sau $x = \pm y$ şi $x^{2k+1} = y^{2k+1} \Rightarrow x = y$

8) Conjugat, tipuri de conjugat:-conjugatul unei expresii - expresie cu care dacă înmulţim expresia iniţială, dispare radicalul

Număr	***Conjugat***	***Rezultat***
$\sqrt{a}$	$\sqrt{a}$	a
$\sqrt[7]{a^2}$	$\sqrt[7]{a^5}$	a
$a\sqrt{b}$	$\sqrt{b}$	ab
$\sqrt{a} - \sqrt{b}$	$\sqrt{a} + \sqrt{b}$	$a - b$
$a + \sqrt{b}$	$a - \sqrt{b}$	$a^2 - b$
$\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}$	$\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}$	$a + b$
$\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}$	$\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}$	$a - b$
$a^2 - a\sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{b^2}$	$a + \sqrt[3]{b}$	$a^3 + b$

9) Definiţia logaritmului

$\log_b A = N \Leftrightarrow A = b^N$, b se numeşte bază iar A argument

10) Condiţii ce se pun la logaritmi $\begin{cases} b>0 \\ b\neq 1 \\ A>0 \end{cases}$

11) Proprietăţi ale logaritmilor – fie $b>0, b\neq 1, A>0, B>0$

$a)\log_b 1 = 0$ $\qquad$ $b)\log_b b = 1$

$c)\log_b A + \log_b B = \log_b (A\cdot B)$ $\qquad$ $d)\log_b A - \log_b B = \log_b \dfrac{A}{B}$

Obs.: Nu exista formulă pentru $\log_b(A+B)$, nici pentru $\log_b(A-B)$

e) $\log_b A^n = n\cdot \log_b A$ $\qquad$ f) $\log_b \sqrt[n]{A} = \dfrac{1}{n}\cdot \log_b A$

g) $\log_{b^n} A = \dfrac{1}{n}\cdot \log_b A$ $\qquad$ h) $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$, pentru $b\neq 1$

i) $a^{n\log_b c} = c^{n\log_b a}$ $\qquad$ j) $a^{\log_a b} = b$ $\qquad$ k) $f^{g} = e^{g\cdot \ln f}$

l) schimbarea bazei:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \quad \text{sau} \quad \log_a b = \log_c b \cdot \log_a c$$

Obs.: $\log_{10} A$ se notează $\lg A$ -logaritm zecimal

$\log_e A$ se notează $\ln A$ -logaritm natural

12) Scrierea unui număr ca un logaritm într-o bază dată:

$$N = \log_b b^N$$

13) Compararea a doi logaritmi

$$b\in(0,1) \text{ atunci } (\log_b x < \log_b y \Leftrightarrow x > y)$$

$$b\in(1,\infty) \text{ atunci } (\log_b x < \log_b y \Leftrightarrow x < y)$$

Capitolul IX
NUMERE COMPLEXE (X)

1) Forma algebrică a numerelor complexe $z=a+bi$ unde $i^2=-1 \Leftrightarrow i=\sqrt{-1}$

Obs.1:dacă avem $M(a,b) \Rightarrow z=a+bi$ este afixul punctului $M(a,b)$

dacă avem $z=a+bi \Rightarrow M(a,b)$ este imaginea lui $z=a+bi$

Obs.2: **Partea reală** $\operatorname{Re} z=a$ **, coeficientul părții imaginare** $\operatorname{Im} z=b$, **partea imaginară** $=bi$ pentru $z=a+bi$, deci $z=\operatorname{Re} z+\operatorname{Im} z\cdot i$

2) Calcularea puterilor lui i - se împarte puterea la 4, se scrie proba împărţirii şi se foloseşte $i^{4n}=1; i^{4n+1}=i; i^{4n+2}=-1; i^{4n+3}=-i$

3) Egalitatea a două numere complexe

$$z_1=z_2 \Leftrightarrow a_1=a_2 \text{ şi } b_1=b_2$$

4) Operaţii cu numere complexe: dacă $z_1=a_1+b_1 i, z_2=a_2+b_2 i$, atunci: $z_1+z_2=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)i$,

$z_1-z_2=(a_1-a_2)+(b_1-b_2)i$,

$z_1\cdot z_2=a_1\cdot a_2-b_1\cdot b_2+(a_1\cdot b_2+a_2\cdot b_1)i$

5) Conjugatul lui z – schimbă semnul din faţa lui i, se notează $\bar{z}$, adică pentru $z=a+bi$, obţinem $\overline{z}=a-bi$

Proprietăţi.: a) $\overline{\sum_{k=1}^{n} z_k}=\sum_{k=1}^{n}\overline{z_k}$ b) $\overline{\prod_{k=1}^{n} z_k}=\prod_{k=1}^{n}\overline{z_k}$

c) $\overline{z^n}=(\bar{z})^n$ d) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

Obs.: pentru a calcula $\frac{z_1}{z_2}$ raţionalizăm cu conjugatul lui $c+di$ şi obţinem $\frac{z_1}{z_2}=\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)(c-di)}{c^2+d^2}$

6) Pentru a arăta că $z = a + bi \in \mathbb{R}$ arătăm că $b = 0$ sau că $z = \overline{z}$
Pentru a arăta că $z = a + bi \in \mathbb{R}^{*} i$ (pur imaginar) arătăm că $a = 0, b \neq 0$ sau că $z = -\overline{z}, z \neq 0$

7) Modulul unui număr complex dacă

$z = a + bi \Rightarrow |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Obs.: $\left|z^n\right| = |z|^n$, $\quad \left|z_1 \cdot z_2\right| = |z_1| \cdot |z_2|$, $\quad \left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$, $\quad z \cdot \overline{z} = |z|^2$

Obs.: $\left|z_1 \cdot z_2 \cdot \ldots \cdot z_n\right| = |z_1| \cdot |z_2| \cdot \ldots \cdot |z_n|$

8) Rădăcinile complexe primitive de ordinul 3 ale unităţii

$$\left(\alpha^3 = 1, \alpha \notin \mathbb{R}\right) \Leftrightarrow \left(\alpha^2 + \alpha + 1 = 0\right) \Leftrightarrow \left(\alpha_{1,2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}\right)$$

9) Rădăcinile complexe primitive de ordinul 3 ale lui "-1"

10) $\left(\alpha^3 = -1, \alpha \notin \mathbb{R}\right) \Leftrightarrow \left(\alpha^2 - \alpha + 1 = 0\right) \Leftrightarrow \left(\alpha_{1,2} = \dfrac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}\right)$

11) Forma trigonometrică a unui numărului complex

$z = a + bi$ este $z = r(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$, unde $\varphi \in [0; 2\pi)$

Cazul I: dacă $a = 0$ şi $b = 0$, atunci $M(a,b)$ este originea axelor, deci unghiul φ poate fi oricât, iar $r = 0$

Cazul II: dacă $a = 0$ sau $b = 0$, atunci $M(a,b)$ aparţine unei axe, $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ iar unghiul φ este unghiul format de semidreapta pozitivă Ox cu semidreapta OM

Cazul III: dacă $a \neq 0$ şi $b \neq 0$, atunci $M(a,b)$ nu este pe axe $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ iar $\varphi = arctg\dfrac{b}{a} + k\pi$ unde valorile lui k se determină în funcţie de cadrane, astfel:

$$M \in \text{Cadranul I} \Rightarrow k = 0$$
$$M \in \text{Cadranul II} \Rightarrow k = 1$$
$$M \in \text{Cadranul III} \Rightarrow k = 1$$
$$M \in \text{Cadranul IV} \Rightarrow k = 2$$

12) Operaţii cu numere complexe sub formă trigonometrică

a) <u>înmulţirea</u>: $z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2\left(\cos\left(\varphi_1 + \varphi_2\right) + i \cdot \sin\left(\varphi_1 + \varphi_2\right)\right)$

b) <u>împărţirea</u>: $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}\left(\cos\left(\varphi_1 - \varphi_2\right) + i \cdot \sin\left(\varphi_1 - \varphi_2\right)\right)$

c) <u>determinarea inversului:</u> $\dfrac{1}{z_1} = \dfrac{1}{r_1} \cdot \left(\cos(-\varphi_1) + i \cdot \sin(-\varphi_1)\right)$

d) <u>ridicarea la putere:</u> $z^n = r^n(\cos(n \cdot \varphi) + i \cdot \sin(n \cdot \varphi))$

Obs.: dacă $z = r(\cos\varphi - i \cdot \sin\varphi)$ atunci $z^n = r^n(\cos(n \cdot \varphi) - i \cdot \sin(n \cdot \varphi))$

e) <u>formula lui Moivre</u>: este ridicare la putere a numerelor complexe cu $r = 1 \Rightarrow z^n = \cos(n \cdot \varphi) + i \cdot \sin(n \cdot \varphi)$

13) Rădăcinile de ordinul n dintr-un număr complex

se cere rezolvarea $z^n = \alpha, \alpha \in \mathbb{C}$

E1) se scrie $\alpha = r(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$

E2) se foloseşte formula $z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\dfrac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \cdot \sin\dfrac{\varphi + 2k\pi}{n}\right), k = \overline{0, n-1}$

14) Rădăcinile de ordinul n ale unităţii

$$\alpha = 1 \Rightarrow z_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i \cdot \sin\frac{2k\pi}{n}, k = \overline{0, n-1}$$

15) Rezolvarea ecuaţiilor de forma $z^n = \overline{z}$

E1) $z^n = \overline{z} \Rightarrow \left|z^n\right| = \left|\overline{z}\right| \Rightarrow |z|^n = |z| \Rightarrow z \in \{0;1\}$

E2) din $\left|z\right| = 0 \Rightarrow z = 0$**,** din $\left|z\right| = 1$, folosind

$z^n = \overline{z}\,\Big| \cdot z \Rightarrow z^{n+1} = z \cdot \overline{z} \Rightarrow z^{n+1} = \left|z\right|^2 \Rightarrow z^{n+1} = 1$ şi de aici sau rezolvăm algebric, sau folosim $z_k = \left(\cos\frac{2k\pi}{n} + i \cdot \sin\frac{2k\pi}{n}\right), k = \overline{0, n-1}$

Capitolul X
FUNCŢII BIJECTIVE. ECUAŢII (X)

1) Funcţii injective f injectivă $\Leftrightarrow$

a) $f\left(x_1\right)=f\left(x_2\right)\Rightarrow x_1=x_2$

b) $\forall y\in Cd_f$, ecuaţia $f\left(x\right)=y$ are cel mult o soluţie $x\in D_f$

c) $\forall y\in Cd_f$, paralela prin y la Ox intersectează graficul lui f în cel mult un punct

Obs.1: Orice funcţie strict monotonă este injectivă

Obs.2: o funcţie NU E injectivă dacă găsim două valori $x_1\neq x_2$ cu $f\left(x_1\right)=f\left(x_2\right)$

2) Funţii surjective f surjectivă $\Leftrightarrow$

a) $\operatorname{Im} f=Cd_f$

b) $\forall y\in Cd_f$, ecuaţia $f\left(x\right)=y$ are cel puţin o soluţie $x\in D_f$

c) $\forall y\in Cd_f$, paralela prin y la Ox intersectează graficul lui f în cel puţin un punct

Obs.1: o funcţie NU E surjectivă dacă găsim un $y\in Cd_f$ pentru care NU EXISTĂ $x\in D_f$ cu $f\left(x\right)=y$

3) Funţii bijective f bijectivă $\Leftrightarrow$

a) f injectivă şi surjectivă

b) $\forall y\in Cd_f$, ecuaţia $f\left(x\right)=y$ are exact o soluţie $x\in D_f$

c) $\forall y\in Cd_f$, paralela prin y la Ox intersectează graficul lui f în exact un punct

Obs.1: o funcţie NU E bijectivă dacă arătăm că nu e injectivă SAU că nu e surjectivă

4) Inversa unei funcţii $f:A\to B$ admite inversă $\Leftrightarrow f$ este bijectivă

E1) se arată că f bijectivă

E2) notăm $f(x)=y\Rightarrow x=.....$ în funcţie de y

Obs.1: Dacă nu există x sau dacă x nu e unic $\Rightarrow$ f nu e bijectivă $\Rightarrow$ nu exista $f^{-1}(x)$

E3) notăm $f^{-1}(y)=$ expresia lui x în funcţie de y obţinută anterior, apoi revenim la notaţia cu x

Obs.1: Dacă $f:A\to B\Rightarrow f^{-1}:B\to A$

Obs.2: Dacă f admite inversă pe g, atunci $f(a)=b\Leftrightarrow g(b)=a$

5) Ecuaţii iraţionale de tipul $\sqrt[n]{f(x)}=g(x)$

Exp.1: $\sqrt{f(x)}=g(x)$

Cond.: $\begin{cases} f(x)\geq 0\Rightarrow x\in I_1 \\ g(x)\geq 0\Rightarrow x\in I_2\end{cases}$ $\quad I_C=I_1\cap I_2$

$\Rightarrow f(x)=(g(x))^2\Rightarrow x\in\{..\}$. Se aleg doar valorile din I_C

Exp.2: $\sqrt[3]{f(x)}=g(x)$

Cond.: $x\in\mathbb{R}\Rightarrow I_C=\mathbb{R}$

$f(x)=(g(x))^3\Rightarrow x\in\{..\}$, şi cum $I_C=\mathbb{R}$, toate valorile găsite pentru x sunt soluţii.

6) Ecuaţii iraţionale de tipul $\sqrt[n]{f(x)}+\sqrt[m]{g(x)}=a$

apar doi radicali, de acelaşi ordin sau ordin diferit

E1) eventuale condiţii

E2) notăm $\sqrt[n]{f(x)}=u\Rightarrow x=...$ (în funcţie de u)

$\sqrt[m]{g(x)}=v\Rightarrow x=...$ (în funcţie de v)

E3) egalăm $x\Rightarrow$ ecuaţia (1) între u şi v

E4) ecuaţia (2) este $u+v=a$

E5) avem un sistem de unde obţinem $u=...,v=...\Rightarrow x=...$

7) Ecuaţii exponenţiale de tipul $\alpha\cdot b^{x+1}+\beta\cdot b^{x}+\gamma=0$, se notează $b^{x}=t$

8) Ecuaţii exponenţiale de tipul $c_1\cdot a^{2f(x)}+c_2\cdot a^{f(x)}+c_3=0$

Notăm $a^{f(x)}=y>0$ şi se obţine o ecuaţie de gradul II în y, se aleg doar soluţiile strict pozitive, apoi se găseşte soluţia direct sau se logaritmează

9) Ecuaţii exponenţiale de tipul $\alpha\cdot b^{2x}+\beta\cdot(ab)^{x}+\gamma\cdot b^{2x}=0$, se împarte ecuaţia prin cea mai mică putere

10) Ecuaţii logaritmice de tipul $\log_{f(x)} g(x)=\alpha$

Condiţii: $\begin{cases} f(x)>0 \\ f(x)\neq 1\Rightarrow I_c \\ g(x)>0 \end{cases}$

Ec.devine $g(x)=\left(f(x)\right)^{\alpha}$, se aleg soluţiile din I_C

11) Ecuaţii logaritmice de tipul $\log_b^2 f(x)+\log_b f(x)+a=0$, notăm $\log_b f(x)=t$ şi obţinem o ecuaţie de gradul II în *t.* Se aleg atât soluţiile pozitive cât şi cele negative pentru t deoarece valoarea logaritmului poate fi atât pozitivă cât şi negativă.

12) Ecuaţii ce se rezolvă folosind monotonia - se aduce ecuaţia la forma $f(x)=a$, unde f este strict monotonă.

- se arată că f strict monotonă, deci ecuaţia are cel mult o soluţie
- se observă soluţia, deci această soluţie va fi unică

Capitolul XI
COMBINATORICĂ (X)

1) Definiţia factorialului $n! = 1\cdot 2\cdot ...\cdot n$ şi $0! = 1$

Obs: în calcule, întotdeauna descompunem cel mai mare factorial în funcţie de cel mai mic

2) Mulţimi ordonate: contează ordinea, apar paranteze rotunde

Mulţimi neordonate: nu contează ordinea, apar acolade

3) Definiţia permutărilor: numărul mulţimilor ordonate cu n elemente, se notează $P_n = n!$

Exp: Având 7 cărţi colorate diferit, în câte moduri le pot aranja pe un raft?

Răspuns: în $P_7 = 7!$ moduri

Obs: Atunci când apare P_n, se pun condiţii $n \in \mathbb{N}$

4) Definiţia aranjamentelor: numărul submulţimilor ordonate de k elemente din n elemente posibile, se notează $A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$

Exp: Având 7 cărţi colorate diferit, în câte moduri pot aranja 5 din ele pe un raft?

Răspuns: contează ordinea în care le aleg, deci în A_7^5 moduri

Obs: Atunci cand apare A_n^k, condiţii $\begin{cases} n,k \in \mathbb{N} \\ n \geq k \end{cases}$

5) Definiţia combinărilor: numărul submulţimilor neordonate de k elemente din n elemente posibile, se notează $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

Exp: Având 7 cărţi colorate diferit, în câte moduri pot lua cu mine 5 din ele pentru a pleca în excursie?

Răspuns: nu contează ordinea în care le aleg, deci în C_7^5 moduri

Obs.: Atunci când apare C_n^k, condiţii $\begin{cases} n,k \in \mathbb{N} \\ n \geq k \end{cases}$

6) Proprietăţi ale combinărilor

$a)\ C_n^k = C_n^{n-k}$ (formula combinărilor complementare)

$b)\ C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$ (formulă de recurenţă)

$c)\ k \cdot C_n^k = n \cdot C_{n-1}^{k-1}$

7) Regula sumei: Dacă un obiect E se poate alege în m moduri şi altul F în n moduri, alegerea lui E sau F se face în $(m+n)$ moduri

8) Regula produsului Dacă un obiect E se poate alege în m moduri şi dacă după fiecare astfel de alegere, un alt obiect F în se poate alege în n moduri independente de alegerea lui E, atunci alegerea perechii (E,F) se face în $(m \cdot n)$ moduri

9) Formule pentru problemele de numărare

a) nr. de funcţii oarecare, $f : A \to B$ este $(card\ \mathrm{B})^{card\ \mathrm{A}}$

b) nr. de funcţii injective, $f : A \to B$ este $A_{card\ \mathrm{B}}^{card\ \mathrm{A}} = A_b^a$

c) nr. de funcţii bijective, $f : A \to B$ este $A_{card\ \mathrm{B}}^{card\ \mathrm{A}} = b!$ căci atunci A şi B au acelaşi număr de elemente

d) nr. de funcţii $s \nearrow$, $f : A \to B$ este $C_{card\ \mathrm{B}}^{card\ \mathrm{A}} = C_b^a$

nr. de funcţii $s \searrow$, $f : A \to B$ este $C_{card\ \mathrm{B}}^{card\ \mathrm{A}} = C_b^a$

nr. de funcţii strict monotone, $f : A \to B$ este $C_b^a + C_b^a = 2C_b^a$

e) nr. de submulţimi cu k elemente ale unei mulţimi neordonate cu n elemente este C_n^k

f) nr. total de submulţimi ale unei mulţimi neordonate cu n elemente este 2^n

g) nr. de submulţimi ordonate crescător cu k elemente ale unei mulţimi cu n elemente este C_n^k

nr. de submulţimi ordonate descrescător cu k elemente ale unei mulţimi cu n elemente este C_n^k

10) Probabilitatea realizării unui eveniment

$$P=\frac{\text{număr de cazuri favorabile}}{\text{număr de cazuri posibile}}$$

11) Binomul lui Newton $(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k a^{n-k}b^k$

Obs.1: $(a-b)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k a^{n-k}(-b)^k=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k a^{n-k}b^k$

Obs.2: coeficienţi binomiali sunt combinările ce apar în faţa fiecărui termen

Obs.3: Termenul general al dezvoltării este $T_{k+1}=C_n^k a^{n-k}b^k$**,** rangul unui termen este poziţia pe care apare, deci este $k+1$

Obs.4: orice binom are $n+1$ termeni

12) Condiţia ca un termen să nu-l conţină pe x, sau să-l conţină pe x la o anumită putere

E1) se scrie termenul general T_{k+1}

E2) se aduce la cea mai simpla formă

E3) se pune condiţia ca puterea lui x să fie 0, sau să fie cât se cere în enunţ

13) Condiţia ca un termen sa fie raţional

E1) se scrie termenul general T_{k+1}

E2) se aduce la cea mai simplă formă

E3) se pune condiţia ca toate puterile să fie întregi, se numără câţi termeni au această proprietate

Obs.: Dacă se cere numărul termenilor raţionali şi numărul lor este mare, se foloseşte formula termenului general al unei progresii aritmetice: $a_n=a_1+(n-1)r$, unde a_n, a_1 si r se cunosc

14) Rangul termenului maxim - T_{k+1} este termenul maxim $\Leftrightarrow T_k\le T_{k+1}\ge T_{k+2}$, iar în ipoteza T_k pozitiv urmăm etapele:

E1) deducem formula $\frac{T_{k+1}}{T_k}=\frac{b}{a}\cdot\frac{n-k+1}{k}$ sau o memorăm

E2) din $\frac{T_{k+1}}{T_k}=\frac{b}{a}\cdot\frac{n-k+1}{k}$ deducem $\frac{T_{k+2}}{T_{k+1}}=\frac{b}{a}\cdot\frac{n-(k+1)+1}{k+1}$, adică $\frac{T_{k+2}}{T_{k+1}}=\frac{b}{a}\cdot\frac{n-k}{k+1}$

E3) rezolvăm sistemul $\begin{cases}\frac{T_{k+1}}{T_k}\geq 1\\ \frac{T_{k+2}}{T_{k+1}}\leq 1\end{cases}$

E4) alegem k valoare naturală din intervalul determinat

E5) rangul cerut va fi $k+1$

15) Calcularea sumelor elementare de combinări:

$C_n^0+C_n^1+....+C_n^n=2^n$ $\qquad$ $C_n^0-C_n^1+.C_n^2-C_n^3+...=0$

$C_n^0+C_n^2+....=2^{n-1}$ $\qquad$ $C_n^1+C_n^3+....=2^{n-1}$

Capitolul XII
PERMUTĂRI (XI)

1) Permutarea de ordinul n este un tabel cu 2 linii, pe prima linie numerele crescătoare de la 1 la *n*, pe cea de-a doua linie aceleaşi numere în indiferent ce ordine

Obs : există permutarea identică $e=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3... & n\\ 1 & 2 & 3... & n\end{pmatrix}$.

2) Inversa unei permutari: se permută cea de-a 2-a linie din σ cu prima linie, păstrându-se perechile corespunzătoare şi scriind în ordine crescătoare elementele primei linii în σ^{-1}

$$\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 4 & 3 & 1 & 2\end{pmatrix}\Rightarrow \sigma^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 4 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

3) Compunerea (înmulţirea) a 2 permutări – se foloseşte compunerea funcţiilor $(\sigma_1\circ\sigma_2)(k)=\sigma_1(\sigma_2(k))=\sigma_1(...)=...$ şi se aplică pentru fiecare element, adică pornim cu cea de-a doua permutare

4) Inversiune a unei permutări – punerea unui element mare din linia a II-a în faţa unuia mai mic, numărul tuturor inversiunilor se notează $m(\sigma)$.

5) Semnul unei permutări: se notează $\varepsilon(\sigma)=(-1)^{m(\sigma)}$.

Obs.1 : $\varepsilon(\sigma)=-1\Rightarrow\sigma$ permutare impară

$\varepsilon(\sigma)=1\Rightarrow\sigma$ permutare pară

Obs.2: $\varepsilon(\sigma_1\bullet\sigma_2)=\varepsilon(\sigma_1)\bullet\varepsilon(\sigma_2)$ $\quad\varepsilon(\sigma)=\varepsilon(\sigma^{-1})$

Obs.3: numărul permutărilor pare de grad n este egal cu numărul permutărilor impare de grad n

6) Transpoziţii – permutări obţinute din permutarea identică prin inversarea a 2 elemente din linia a doua între ele se notează (i,j)

Obs.1: $(i,j)=(j,i)$ $\quad(i,j)\circ(i,j)=e$ $\quad(i,j)^{-1}=(i,j)$

Capitolul XIII
MATRICI (XI)

1) Matrici: Tablou cu m linii şi n coloane

Notăm $A \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$ sau $A = (a_{i,j})$, $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$

2) Tipuri de matrici: *Matrice linie* – o singură linie

Matrice coloană – o singură coloană

Matrice nulă $O_{m,n}$ - toate elementele sunt 0

Matrice pătratică – numărul de linii este egal cu numărul de coloane

Obs: Pentru matrice pătratică există diagonală principală $\left(a_{1,1}, a_{2,2}, ..., a_{n,n}\right)$ şi diagonală secundară $\left(a_{1,n,} a_{2,n-1}, ..., a_{n,1}\right)$ şi există urma matricii $Tr\ A = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$ (suma elementelor de pe diagonala principală)

Matrice unitate: pătratică, cu diagonala principală formată din cifre de 1, restul sunt 0. Se notează I_n

3) Transpusa unei matrici – se notează ${}^tA$, inversează liniile cu coloanele;

4) Egalitatea a două matrici: - 2 matrici sunt egale doar dacă sunt de acelaşi tip şi dacă elementele corespunzătoare sunt egale

5) Adunarea, scăderea matricilor – se poate efectua doar dacă sunt de acelaşi tip, se adună (scad) elementele corespunzătoare

Obs.: ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$

6) Înmulţirea cu scalari a matricilor – se înmulţeşte fiecare element cu α, adică atunci când $A = \left(a_{ij}\right)$, există $a \cdot A = \left(a \cdot a_{ij}\right)$

7) Înmulţirea matricilor: $A \in M_{m\times n}$; $B \in M_{n\times p}$ atunci $\exists A \cdot B \in M_{m\times p}$

Obs.: 1)Trebuie ca numărul coloanelor din prima matrice să fie egal cu numărul liniilor din a doua matrice

Se înmulţeşte corespunzător fiecare element al liniei întâi cu elementul corespunzător al coloanei întâi şi se adună rezultatele, apoi fiecare element al liniei întâi cu elementul corespunzător al coloanei a doua şi se adună rezultatele etc. Se completează astfel prima linie. Repetăm procedeul pentru celelalte linii. De fapt, înmulţim corespunzător elementele primei linii cu ale primei coloane şi adunăm rezultatele, apoi elementele primei linii cu elementele celei de-a doua coloane, etc.

Obs: $O_{m,n} \cdot A = O_{m,n}$ şi $O_{m,n} \cdot A \not= 0$

Obs.2: ${}^t(A \cdot B) = {}^tB \cdot {}^tA$

8) Puterile unei matrici – există doar dacă matricea este pătratică

$$A^0 = I_n,\ A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{\text{n ori}}$$

Obs.: Toate formulele de calcul prescurtat şi binomul lui Newton se pot aplica doar dacă A şi B comută între ele

9) Calcularea valorilor unei funcţii într-o matrice – dacă

$$f = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \Rightarrow f = a_n A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \ldots + a_1 A + a_0 I_n$$

adică se înlocuieşte matricea A în locul lui x iar termenul liber α devine $\alpha \cdot I_n$

10) Calculul puterilor unei matrici folosind inducţía matematică

- se calculează $A^2, A^3, \ldots$, se observă regula, se arată prin inducţie

11) Calculul puterilor unei matrici folosind binomul lui Newton

- se scrie $A = I_2 + B$, se calculează $B^2, B^3, \ldots$ până obţinem $O_{m,n}$
- se desface cu Newton şi se anulează ultimii termeni, se arată prin inducţie

12) Ecuaţia Cayley – Hamilton – $\forall A \in M_2(\mathbb{C}), A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow A^2 - (a+d) \cdot A + (ad - bc) \cdot I_2 = O_2$$

Obs.: Dacă $ad - bc = 0$, se arată prin inducţie că $A^n = (a+d)^{n-1} A$, însă se poate folosi şi ca formulă

Capitolul XIV
DETERMINANŢI (XI)

1. Determinantul – este un număr real asociat unei matrice pătatice, asocierea făcându-se după anumite reguli.
Se definesc prin formule doar determinanţii de ordin 1, 2 sau 3

Astfel, $|a| = a$, $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$,

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + dhc - gec - bdi - afh$$

Exp.: $A = (-2) \Rightarrow \det A = -2$

2. Minor asociat lui $a_{i,j}$ – determinantul obţinut prin tăierea liniei i şi a coloanei j, se noteaza $d_{i,j}$

Complement algebric pentru $a_{i,j}$ – se notează $a_{i,j}^{*} = (-1)^{i+j} \cdot d_{i,j}$.

3. Proprietăţi ale determinanţilor de ordin n

a) $\det(A)$=$\det({}^t A)$ rezultă proprietăţiile valabile pentru linii sunt valabile şi pentru coloane.
b) dacă o linie este formată doar din elementele 0 rezultă $\det A = 0$.
c) dacă 2 linii sunt identice rezultă $\det A = 0$
d) dacă schimbăm 2 linii rezultă $\det A' = -\det A$
e) dacă înmulţim o linie cu α rezultă $\det A' = \alpha \cdot \det A$.
Obs.: se poate scoate şi factor comun.
f) dacă înmulţim toate elementele cu α $\Rightarrow \det(\alpha A) = \alpha^n \cdot \det(A)$
g) dacă elementele a 2 linii sunt proporţionale $\Rightarrow \det A = 0$
h) dacă toate liniile cu exceptia uneia sunt identice, atunci cei doi determinanţi se pot aduna, se copiază liniile identice şi se adună corespunzător elementele liniilor diferite.
i) dacă se adună toate celelalte linii la una fixată avem acelaşi determinant.

Exp. pentru determinanţi de ordin 3, însă la fel se pot folosi pentru determinanţi de orice ordin.

a) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$

c) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ d & e & f \end{vmatrix} = 0$ d) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a & b & c \\ g & h & i \\ d & e & f \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} \alpha \cdot a & \alpha \cdot b & \alpha \cdot c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \alpha \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$

f) $\begin{vmatrix} \alpha \cdot a & \alpha \cdot b & \alpha \cdot c \\ \alpha \cdot d & \alpha \cdot e & \alpha \cdot f \\ \alpha \cdot g & \alpha \cdot h & \alpha \cdot i \end{vmatrix} = \alpha^3 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$ g) $\begin{vmatrix} \alpha \cdot a & \alpha \cdot b & \alpha \cdot c \\ a & b & c \\ d & h & i \end{vmatrix} = 0$

h) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d' & e' & f' \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ d'' & e'' & f'' \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d'+d'' & e'+e'' & f'+f'' \\ g & h & i \end{vmatrix}$

i) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+d+g & b+e+h & c+f+i \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$

Obs.: doar pentru matrici pătratice,

$\det(AB) = \det A \cdot \det B$ şi $\det(A)^n = (\det A)^n$

4. Dezvoltarea determinantului după o linie sau după o coloană

$\det A = \sum a_{ij} \cdot (-1)^{i+j} \cdot (\text{minorul lui } a_{ij})$

5. Dezvoltarea determinantului prin formarea de zerouri

E1) se alege cifra 1, se încercuie linia şi coloana pe care se găseşte

E2) se înmulţeşte pe rând coloana ce-l conţine pe 1 cu numere astfel încât adunată respectiv la cealaltă coloană să dea 0 pe linia lui 1

E3) se dezvoltă după linia încercuită rezultă un singur determinant.

6. Scrierea unui determinant sub formă de produs – se formează zerouri, se dă factor comun şi apoi se calculează

7. Determinant Vandermonde

a) de ordin 3

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} = (y-x)(z-x)(z-y).$$

b) de ordin 4

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & y & z & t \\ x^2 & y^2 & z^2 & t^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 & t^3 \end{vmatrix} = (y-x)(z-x)(t-x)(z-y)(t-y)(t-z).$$

Obs.: se calculează prin formare de zerouri şi scoatere de factor comun.

8. Rangul unei matrice – este numărul maxim de linii(sau de coloane) al unui minor nenul al matricii date

E1) dacă A pătratică de ordinul n cu $\det A \neq 0 \Rightarrow rangA = n$

E2) dacă A pătratică cu $\det A = 0$ sau A nu e pătratică, alegem un minor de ordinul 1 nenul $\Rightarrow rangA \geq 1$ (dacă toate elementele sunt 0, atunci $rangA = 0$)

E3) bordăm minorul şi obţinem minori de ordinul 2. Dacă toţi minorii astfel obţinuţi sunt nuli $\Rightarrow rangA = 1$, dacă nu, atunci găsim unul nenul de ordin 2 $\Rightarrow rangA \geq 2$

E4) bordăm minorul si obţinem minori de ordinul 3. Dacă toţi minorii astfel obtinuţi sunt nuli $\Rightarrow rangA = 2$, dacă nu, atunci găsim unul nenul de ordin 3 $\Rightarrow rangA \geq 3$

E5) bordăm minorul astfel obţinut, repetăm procedeul din E3)

Obs.: a „borda” un minor înseamnă a pune „borduri”, adică elemente din aceeaşi linie şi aceeaşi coloană

9. Definiţia inversei unei matrici – inversa unei matrici există doar pentru matrice pătratică

Dacă $\exists B \in M_n(\mathbb{C})$ a. î. $AB = BA = I_n \Rightarrow A$ este inversabilă şi $A^{-1} = B$

10. Determinarea prin calcul a inversei unei matrici:

E1) se calculează $\det A$, dacă $\det A \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1} \Rightarrow E2)$

dacă $\det A = 0 \Rightarrow \nexists A^{-1}$

E2) se calculează ${}^tA$.

E3) se calculeaza A^* matrice adjuncta, unde $A^* = \left(a_{i,j}^*\right)$ ai lui ${}^tA$

adica A^* este formată din complemenţii algebrici ai lui ${}^tA$.

E4) $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)} \cdot A^*$

Obs.: O matrice ce admite inversă se numeşte nesingulară.

Capitolul XV
SISTEME LINIARE CU CEL MULT PATRU NECUNOSCUTE(XI)

1.Sistem cu *m* ecuaţii liniare şi *n* necunoscute are forma

$$(S)\quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

2.Studierea compatibilităţii unui sistem

T. Rouche – (S) compatibil $\Leftrightarrow$ toţi minorii caracteristici sunt nuli

T. Kronecker-Capelli – (S) compatibil $\Leftrightarrow rangA = rang\overline{A}$

3.Condiţii de compatibilitate a unui sistem cu matrice pătratică

un sistem poate fi: a) incompatibil: nu are soluţie
b) compatibil: - determinat (soluţia numere)
- nedeterminat (apar parametri)

Obs.1: Un sistem liniar este compatibil determinat $\Leftrightarrow \det A \neq 0$
Un sistem liniar are soluţie unică $\Leftrightarrow \det A \neq 0$

Obs:2: Un sistem liniar este compatibil nedeterminat dacă
$(\det A = 0 \text{ si toti } \Delta_c = 0 \text{ si } \exists \text{ nec. secundare})$ sau dacă
$\left(\det A = 0 \text{ si } \nexists \Delta_c \text{ si } \exists \text{ nec. secundare}\right)$

Un sistem liniar are o infinitate de soluţii dacă
$(\det A = 0 \text{ si toti } \Delta_c = 0 \text{ si } \exists \text{ nec. secundare})$ sau dacă
$\left(\det A = 0 \text{ si } \nexists \Delta_c \text{ si } \exists \text{ nec. secundare}\right)$

Obs:3: Un sistem liniar este incompatibil $\Leftrightarrow$ $\det A = 0$ şi $\exists \Delta_c \neq 0$

4. Rezolvarea sistemelor prin regula lui Cramer – doar dacă A pătratică cu $\det A \neq 0$

E1) scriem A matricea formată din coeficienţii sistemului

E2) dacă A pătratică cu $\det A \neq 0 \Rightarrow$ calculăm Δ_x format din $\det A$

prin înlocuirea coloanei lui x cu cea a termenilor liberi, Δ_y prin înlocuirea coloanei lui y, Δ_z prin înlocuirea coloanei lui z, ...

E3) soluţiile vor fi: $x=\frac{\Delta_x}{\det A}$, $y=\frac{\Delta_y}{\det A}$, $z=\frac{\Delta_z}{\det A}$; ....

5.Rezolvarea sistemelor liniare în cazul general

E1) scriem A matricea formată din coeficienţii sistemului şi $\overline{A}$

E2) dacă A pătratică cu $\det A \neq 0 \Rightarrow$ regula lui Cramer

E3) dacă A nu e pătratică sau A pătratică cu $\det A = 0$ calculăm $rangA$, iar minorul ce dă $rangA$ se numeşte minor principal (notat Δ_p), calculăm apoi $rang\overline{A}$ (rangul matricii extinse)

E4) dacă $rangA \neq rang\overline{A} \Rightarrow$ sistem incompatibil

dacă $rangA = rang\overline{A} \Rightarrow$ sistemul e compatibil $\Rightarrow$ E$_6$)

E5) formăm sistemul principal din ecuaţiile ce intră în Δ_p, iar necunoscutele care nu intră în Δ_p le trecem în dreapta, le notăm cu parametri $\alpha, \beta, \ldots$(se numesc necunoscute secundare)

E6) se rezolvă prin orice metodă (reducere, substituţie) sistemul obţinut

6.Sisteme liniare omogene: sunt sisteme liniare (toate necunoscutele sunt la puterea întâi) la care coloana termenilor liberi este egală cu 0.

Obs.: Un sistem omogen e întotdeauna compatibil căci are soluţia banală ($x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$)

Obs.2: un sistem liniar omogen are doar soluţia banală $\Leftrightarrow A$ pătratică cu $\det A \neq 0$ (căci doar atunci se poate rezolva cu Cramer), avem soluţie unică şi deci $\Delta_1 = 0, \Delta_2 = 0, ,... \Rightarrow x_1 = x_2 = ... = 0$

Obs.3: un sistem liniar omogen are o infinitate de soluţii $\Leftrightarrow A$ trebuie să fie pătratică cu $\det A = 0$

Obs.4: un sistem liniar omogen are soluţii diferite de soluţia banală $\Leftrightarrow A$ trebuie să fie pătratică cu $\det A = 0$

Capitolul XVI
LEGI DE COMPOZIŢIE. GRUP (XII)

1)Mulţimea $\mathbb{Z}_n$. Adunarea şi înmulţirea în $\mathbb{Z}_n$

a) Clasa $\hat{a}$ de resturi modulo n este mulţimea notată cu
$\hat{a} = \{\text{toate numerele care împărţite la } n \text{ dau restul } a\}$

Exp.: În $\mathbb{Z}_5$, $\hat{3} = \{..., -2, 3, 8, 13, ...\}$, în $\mathbb{Z}_7$, $\hat{3} = \{..., -4, 3, 10, 17, ...\}$

b) Mulţimea claselor de resturi modulo n este $\mathbb{Z}_n = \left\{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, ..., \widehat{n-1}\right\}$,
adică este formată din clasele tuturor resturilor posibile împărţind un număr la n

Obs.1: $\hat{0}; \hat{1}; ...; \widehat{n-1}$ sunt reprezentanţi canonici pentru $\mathbb{Z}_n$

c) $\hat{a} + \hat{b} = \widehat{a+b} \Leftrightarrow \widehat{a+b} = \text{restul } (a+b):n$, asta înseamnă că putem aduna reprezentanţii claselor, apoi calculăm restul împărţirii la n, analog pentru $\hat{a} \cdot \hat{b} = \widehat{a \cdot b}$

Obs.2.: Uneori este mai simplu să adunăm sau să scădem “***n***” din rezultat până obţinem o clasă dintre $\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, ..., \widehat{n-1}$ decât să calculăm restul împărţirii

2)Rezolvarea ecuaţiilor în $\mathbb{Z}_n$

Met I: Se aduce ecuaţia la forma $\hat{a} \cdot \hat{x} = \hat{b}$ şi dacă $\hat{a}$ inversabil
$\Rightarrow \hat{x} = \hat{a}^{-1} \cdot \hat{b}$. Nu e metoda generală.

Metoda II (generală): Se prelucrează ecuaţia, se verifică care din numerele din $\mathbb{Z}_n$ sunt soluţii (este metodă generală)

3)Rezolvarea sistemelor în $\mathbb{Z}_n$

<u>Metoda reducerii:</u> se aduc ecuaţiile la forma $\hat{a} \cdot \hat{x} + \hat{b} \cdot \hat{y} = \hat{c}$, apoi se înmulţeşte ecuaţia convenabil a.î. adunată la cea de-a doua înmulţită şi ea convenabil să reducem o necunoscută şi vom obţine astfel o ecuaţie cu o necunoscută

Metoda substituţiei: se aduce una din ecuaţii la forma $\hat{a}\cdot\hat{x}=\hat{b}\cdot\hat{y}+\hat{c}$, dacă $\hat{a}$ inversabil ecuaţia cu $\hat{a}' \Rightarrow \hat{x}=\hat{a}'\cdot\hat{b}\cdot\hat{y}+\hat{a}'\cdot\hat{c}$ îl înlocuim în cea de-a doua $\Rightarrow$ ecuaţie cu o singură necunoscută.

Metoda lui Cramer: se aplică doar dacă numărul de ecuaţii este egal cu numărul de necunoscute si valoarea lui detA este un **element inversabil** în $\mathbb{Z}_n$. Calculăm $\Delta_x, \Delta_y ... \Rightarrow x=\Delta_x\cdot(\det A)', x=\Delta_y\cdot(\det A)'$

4) „$\circ$” este lege de compoziţie (sau lege de compoziţie internă) pe mulţimea $M \Leftrightarrow \forall x,y\in M \Rightarrow x\circ y\in M$

Obs.: ***H* este parte stabilă a lui *M* în raport cu „$\circ$ ”**

1) $H\subset M$ şi
2) $\forall x,y\in H \Rightarrow x\circ y\in H$.

5)Forma restrânsă a unei legi $- x\circ y=a(x-b)(y-b)+b$.

Se foloseşte pentru a demonstra proprietăţile şi pentru a calcula $\underbrace{a*a*....*a}_{\text{de } n \text{ ori}}$

6) „$\circ$” este comutativă pe $M \Leftrightarrow \forall x,y\in M \Rightarrow x\circ y=y\circ x$.

7) „$\circ$” asociativă pe $M \Leftrightarrow \forall x,y,z\in M \Rightarrow x\circ(y\circ z)=(x\circ y)\circ z$.

8) „$\circ$” admite element neutru pe M

$$\Leftrightarrow \exists e\in M \text{ a.î.} \forall x\in M \Rightarrow x\circ e=e\circ x=x$$

9)Elementul *x* admite simetric în raport cu legea „$\circ$”

1) $\circ$ admite element neutru
2) $\exists x'\in M$ astfel încât $x\circ x'=x'\circ x=e$

10)Orice element e simetrizabil $\Leftrightarrow$

1) $\exists e\in M$ element neutru şi
2) $\forall x\in M, \exists x'\in M$ astfel încât $x\circ x'=x'\circ x=e$

11)Distributivitatea unei legi în raport cu o altă lege:

"$\circ$" este distributivă la stânga faţă de “*” dacă

$$x\circ(y*z)=(x\circ y)*(x\circ z), \forall x,y,z\in M$$

“$\circ$”este distributivă la dreapta faţă de “*” dacă

$$(x*y)\circ z=(x\circ z)*(y\circ z), \forall x,y,z\in M$$

Obs.: “$\circ$”este distributivă faţă de “*” dacă $\circ$ este distributivă şi la stânga şi la dreapta faţă de legea “*”

12) Tabla operaţiei „$\circ$” are forma:

$\circ$	a_1	a_2	....	a_n
a_1	$a_1 \circ a_1$	$a_1 \circ a_2$	....	$a_1 \circ a_n$
a_2	$a_2 \circ a_1$	$a_2 \circ a_2$		$a_2 \circ a_n$
...	....	......	....	......
a_n	$a_n \circ a_1$	$a_n \circ a_2$		$a_n \circ a_n$

Obs.: pe coloană considerăm *x*, iar pe linie *y*

Obs.: Tabla operaţiei există doar dacă mulţimea este finită.

13) Proprietăţi ale legilor de compoziţie deduse din tablă

a) $"\circ"$ lege internă- în tablă nu apar elemente noi

b) $"\circ"$comutativă - toate elementele sunt simetrice faţă de diagonala principală

c) $"\circ"$ asociativă - nu merge din tablă, deoarece apar trei elemente

d) $"\circ"$ are element neutru - există o linie şi coloana corespunzătoare care lasă neschimbate elemntele mulţimii

e) un element e simetrizabil - există pe linia şi pe coloana lui elementul neutru situat simetric faţă de diagonala principală

f) $"\circ"$are toate elementele simetrizabile - pe linia şi pe coloana fiecărui element apare elementul neutru situat simetric faţă de diagonala principală

14)Ereditatea legilor de compoziţie

exemple generale de legi asociative:

1) adunarea şi înmulţirea pe $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$
2) reuniunea, intersecţia mulţimilor
3) adunarea, înmulţirea, compunerea funcţiilor
4) adunarea şi înmulţirea matricilor

exemple generale de legi comutative

1) adunarea şi înmulţirea pe $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$
2) reuniunea, intersecţia mulţimilor
3) adunarea, înmulţirea funcţiilor (compunerea NU)
4) adunarea matricilor (înmulţirea NU)

exemple generale de legi cu element neutru

1) adunarea (e =0),înmulţirea (e =1) pe $\mathbb{N},\mathbb{Z},\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C}$

2) adunarea funcţiilor (f(x)=0),înmulţirea funcţiilor (f(x)=1), compunerea funcţiilor ($1_M(x)=x$) doar pentru funcţii bijective

3) adunarea matriciilor pe $M_{m,n}(C)$ are element neutru pe $O_{m,n}$ (matricea nulă) şi înmulţirea pe $M_n(C)$ pe I_n (matricea unitate)

exemple generale de legi cu elemente simetrizabile

1) adunarea pe $\mathbb{Z},\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C}$ are $x'=-x$

2) înmulţirea pe $\mathbb{Q}^*,\mathbb{R}^*,\mathbb{C}^*$ are $x'=\dfrac{1}{x}$

3) adunarea matricilor pe $M_{m,n}$(C) are pe $A= -A$, $A\in M_{m,n}$ *(C),*

4) înmulţirea matricilor pe M_n(C) cu *det*$A\neq 0$ are pe $A'=A^{-1}$ (inversa matricei)

5) adunarea funcţiilor are pe $f'(x)=-f(x)$; înmulţirea funcţiilor pe $f'(x)=\dfrac{1}{f(x)}$, $f(x)\neq 0$, şi compunerea funcţiilor doar pentru funcţii bijective pe $f'(x)=f^{-1}(x)\rightarrow$ inversa funcţiei

exemple generale de legi distributive

1) înmulţirea este distributivă în raport cu adunarea şi scăderea pe $\mathbb{N},\mathbb{Z},\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C}$

1) înmulţirea este distributivă în raport cu adunarea şi scăderea matricilor din $M_n(C)$

3) pentru funcţii, $f\circ(g+h)=f\circ g+f\circ h$

$$(f+g)\circ h=f\circ h+g\circ h$$

4) pentru mulţimi: $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$$

15) Folosirea elementului generic - se foloseşte de obicei la matrici, transpunem regula existentă la matrici într-o regulă a elementelor generice, de tipul $A(x)\cdot A(y)=A(xy+x+y)$

16) $(M,\circ)$ **monoid** $\Leftrightarrow$ (M_0) $(M,\circ)$ parte stabilă

(M_1) $\circ$ asociativă pe M

(M_2) $\circ$ are element neutru pe M

Obs.: Dacă în plus $\exists(M_1')$: $\circ$ comutativă $\Rightarrow$ $(M,\circ)$ monoid comutativ (abelian)

17)Submonoid- pentru a arăta că $(N,\circ)$ submonoid pentru $(M,\circ)$, unde N $\subset$ M, arătăm că $\begin{cases} \forall x,y\in N \Rightarrow x\circ y\in N \\ e\in N \end{cases}$

18)$(M,*)$ monoid $\Rightarrow$ $U(M)=\{x \mid x\in M$ şi x este simetrizabil$\}$ se numeşte **mulţimea elementelor simetrizabile** ale monoidului M

$U(M)=\{x \mid \exists x'\in M$ a.î. $x\circ x'=x'\circ x=e\}$

19) $(G,\circ)$ **e grup** $\Leftrightarrow$ (G_0):$(G,\circ)$ parte stabilă

(G_1) $\circ$ asociativă pe G

(G_2) $\circ$ are element neutru pe G

(G_3) oricare element din G este simetrizabil

Obs 1: Dacă în plus $\exists$ (G'_1): $\circ$ comutativă $\Rightarrow$ $(G,\circ)$ grup comutativ (abelian). Este preferabil să studiem comutativitatea imediat după asociativitate, pentru a o folosi la element neutru şi simetrizabil.

20)Subgrup - pentru a arăta că $(H,\circ)$ este subgrup pentru $(G,\circ)$, unde $H\subset G$ arătăm că:

metoda I: $\begin{cases} \forall x,y\in H \Rightarrow x\circ y\in H \\ \forall x\in H \Rightarrow x'\in H \end{cases}$

metoda II: $\forall x,y\in H \Rightarrow x\circ y'\in H$

21)Grupul aditiv al claselor de resturi modulo nse notează $\left(\mathbb{Z}_n,+\right)$ şi este un grup abelian, unde $\mathbb{Z}_n=\left\{\hat{0},\hat{1},\hat{2},...,\widehat{n-1}\right\}$ iar $\widehat{a+b}=$ restul $\left(a+b\right):n$, iar proprietăţile se deduc din tablă.

22)Monoidul multiplicativ al claselor de resturi modulo n $\left(\mathbb{Z}_n,\cdot\right)$ unde $\mathbb{Z}_n=\left\{\hat{0},\hat{1},\hat{2},...,\widehat{n-1}\right\}$iar $\widehat{a\cdot b}=$ restul $\left(a\cdot b\right):n$

Obs 1: În $\left(\mathbb{Z}_n,\cdot\right)$ elementele inversabile sunt doar cele prime cu n notăm $U(\mathbb{Z}_n)=\{\hat{a}\in\mathbb{Z}_n /(a,b)=1\}$

Obs.2: $\left(U(\mathbb{Z}_n),\cdot\right)$ e grup abelian

Obs 3: n număr prim $\Leftrightarrow$ $\left(\mathbb{Z}_n^*,\cdot\right)$grup abelian, deci orice element e inversabil

Obs.4: Fiind un grup finit, operaţiile se fac în tabla legii

23) Ordinul unui element – cel mai mic $n\in\mathbb{N}^*$ a.î. $\underbrace{x*x*...*x}_{n\text{ ori}}=e$

Obs : Dacă $\nexists n\Rightarrow ord\ a=\infty$.

Obs.2: Dacă G este un grup finit cu n elemente$\Rightarrow x^n=e,\forall x\in G$

24)Ordinul unui grup – numărul de elemente din grupul respectiv.

Obs.1 :Dacă G are un număr infinit de elemente$\Rightarrow ordG=\infty$

Obs.2: ordinul oricărui subgrup divide ordinul grupului

25) Morfisme de monoizi - fie (M,*) şi (M',o) doi monoizi atunci

$$f:M\to M' \text{ morfism}\Leftrightarrow\begin{cases} f(x*y)=f(x)\circ f(y)\\ f\left(e_*\right)=e_\circ\end{cases}$$

26)Izomorfisme de monoizi Fie (M,*) şi (M',o) doi monoizi, atunci $f:M\to M'$ izomorfism $\Leftrightarrow$ f morfism şi f bijectivă

27)Morfisme de grupuri - fie (G,*) şi (G',o) două grupuri atunci $f:G\to G'$ morfism $\Leftrightarrow$ $f(x*y)=f(x)\circ f(y)$

28)Izomorfisme de grupuri Fie (G,*) şi (G',o) două grupuri, atunci $f:G\to G'$ izomorfism $\Leftrightarrow$ f morfism şi f bijectivă

29)Automorfism – este un izomorfism în care domeniul funcţiei coincide cu codomeniul funcţiei

30)Două grupuri finite sunt izomorfe $\Leftrightarrow$ au tablele la fel structurate

31) $(A,*,\circ)$ **Inel** $\Leftrightarrow A_1)(A,*)$ grup abelian

$A_2)(A,\circ)$ monoid

$A_3)\circ$ distributivă faţă de *

*Obs1 :*Dacă $(A,\circ)$ monoid comutativ $\Rightarrow (A,*,\circ)$ inel comutativ;

*Obs3 :*Elementul nul al inelului este e_*, iar elementul unitate este e_o (uneori se mai notează aceste elemente astfel: $e_* = e; e_o = \theta$)

32) Subinel - Dacă $(A,*,\circ)$ inel si $A' \subset A \Rightarrow (A',*,\circ)$ este un subinel al lui $(A,*,\circ)$ dacă a) $\forall x, y \in A' \Rightarrow x * y'_* \in A'$

b) $\forall x, y \in A' \Rightarrow x \circ y \in A', e_o \in A'$ unde x'_* este simetricul lui x în raport cu *

33) Elementele inversabile ale unui inel

$U(A) = \{x \in A \mid x$ e inversabil în raport cu $\circ\}$

34) inelul $(A,*,\circ)$ **este fără divizori ai lui zero**

$\forall x, y \in A$ a.î. $x \neq e_*, y \neq e_* \Rightarrow x \circ y \neq e_*$

Obs.: pentru a arăta că un inel este fără divizori ai lui zero, presupunem că $x \circ y = e_*$ şi trebuie să obţinem că $x \neq e_*$ sau $y \neq e_*$

Inelul $(A,*,\circ)$ **este cu divizori ai lui zero** $\exists x, y \in A, x \neq e_*$ şi $y \neq e_*$ a.î. $x \circ y = e_*$

35) $(\mathbb{Z}_n,+,\cdot)$ **este inel fără divizori ai lui zero** $\Leftrightarrow$ n **număr prim**

Obs.1: Dacă $n \neq$ număr prim, elementele care nu sunt divizori ai lui zero sunt prime cu n (sunt si simetrizabile);

Obs.2 : Dacă numerele au divizori comuni cu n $\Rightarrow$ sunt divizori ai lui zero şi nu sunt simetrizabile;

36) $(K,*,\circ)$ **e corp** $\Leftrightarrow$ $K_1)(K,*)$ grup abelian

$K_2)(K\setminus\{e_*\},\circ)$ grup

$K_3)"\circ"$ distributivă faţă de *

Obs.1: Dacă $(K\setminus\{e_*\},\circ)$ grup abelian $\Rightarrow(K,*,\circ)$ corp abelian

Obs.2: $(\mathbb{Z}_n^*,+,\cdot)$ corp $\Leftrightarrow$ n număr prim;

Obs.: Corpurile nu admit divizori ai lui zero

37) $(A,*,\circ)$ **e domeniu de integritate** $\Leftrightarrow$ $(A,*,\circ)$ e inel comutativ cu cel puţin două elemente şi este fără divizori ai lui zero

38) Definiţia subcorpului dacă $(K,*,\circ)$ corp şi $K'\subset K\Rightarrow(K',*,\circ)$ e subcorp pentru $(K,*,\circ)$ dacă a) $\forall x,y\in K'\Rightarrow x*y'_*\in K'$

b) $\forall x,y\in K'\setminus\{e_*\}\Rightarrow x\circ y'_\circ\in K'\setminus\{e_*\}$

39)Morfisme de inele: fie $(I,*,\circ)$ şi $(I',*',\circ')$ 2 inele, $f:I\to I'$ e morfism de inele dacă $\forall x,y\in I\Rightarrow\begin{cases} f(x*y)=f(x) *' f(y)\\ f(x\circ y)=f(x)\circ' f(y) \text{ şi } f(e_\circ)=e_{\circ'}\end{cases}$

40)Izomorfisme de inele: Dacă f este morfism de inele şi f bijectivă $\Rightarrow$ f este izomorfism de inele

41)Morfism de corpuri

Fie $(K,*,\circ)$ şi $(K',*',\circ')$ 2 corpurI, $f:K\to K'$ e morfism de corpuri dacă $\forall x,y\in K\Rightarrow\begin{cases} f(x*y)=f(x) *' f(y)\\ f(x\circ y)=f(x)\circ' f(y)\end{cases}$

42)Izomorfisme de corpuri Dacă f morfism de corpuri şi f bijectivă $\Rightarrow$ f izomorfism de corpuri;

43)Automorfism – este un izomorfism în care domeniul funcţiei coincide cu codomeniul funcţiei

Capitolul XVII
POLINOAME(XII)

1. Polinom – expresie de forma $f = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + ... + a_1 X + a_0$ sau forma $f = a_0 + a_1 X + ... + a_n X^n$. Numim coeficienţii polinomului numerele $a_0, a_1, ..., a_n$ iar X este nedeterminata polinomului. Dacă $a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{Z}$ notăm $f \in \mathbb{Z}[X]$, etc.

Obs.: **forma algebrică** : $f = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + ... + a_1 X + a_0$ sau orice altă ordine a termenilor, **forma canonică** puterile lui X apar obligatoriu în ordine descrescătoare;

Obs.: un polinom de forma $a_k X^k$ se numeşte **monom de grad** k

2. **Suma coeficienţilor** este $f(1)$

Termen liber este $f(0)$

Suma coeficienţilor de rang par este $\dfrac{f(1) + f(-1)}{2}$

Suma coeficienţilor de rang impar este $\dfrac{f(1) - f(-1)}{2}$

3. Un element $a \in K$ se numeşte rădăcină a polinomului $f \in K[X]$ dacă $f(a) = 0$

4. Gradul unui polinom - dacă $f = 0 \Rightarrow gr\, f = -\infty$

- dacă $f \neq 0 \Rightarrow gr\, f$ este puterea maximă a lui X

5. Operaţii cu polinoame: $f, g \in \mathbb{C}[X]$ sau $f, g \in \mathbb{Z}_p[X]$ unde p număr prim .

a) adunarea, scăderea, înmultirea, înmulţirea cu un scalar şi ridicarea la putere se efectuează ca şi calculul cu litere, se folosesc proprietăţi ale operaţiilor cu puteri şi factor comun

b) împărţirea

$f(X) : g(X)$ dă un cât $q(X)$ rest $r(X)$ şi se parcurg etapele:

E1) dacă $gr\ f(X) < gr\ g(X) \Rightarrow q(X) = 0, r(X) = f(X)$. STOP

E2) dacă $gr\ f(X) \geq gr\ g(X) \Rightarrow$ $\begin{array}{l|l} f(X) & g(X) \\ \cline{2-2} & q(X) \end{array}$

E3) împărţim primul monom al lui $f(X)$ la primul momon al lui $g(X)$ şi obţinem astfel primul monom al lui $q(X)$

E4) înmulţim acest prim monom obţinut la $q(X)$ cu $g(X)$, rezultatul îl trecem cu semn schimbat sub $f(X)$ şi efectuăm adunarea lui $f(X)$ cu rezultatul obţinut prin înmulţire obţinând astfel primul rest parţial $f_1(X)$

E4) dacă $gr\ f_1(X) \geq gr\ g(X)$ continuăm procedeul, altfel STOP şi restul căutat este ultimul rest parţial obţinut.

Obs.: împărţirea se poate realiza şi dacă $f, g \in \mathbb{Z}_n[X]$ cu n nu neapărat număr prim, însă atunci condiţia este ca să avem coeficientul dominant al lui $g(X)$ inversabil în $\mathbb{Z}_n[X]$

6. Teorema împărţirii cu rest

Fie $f, g \in \mathbb{C}[X]$ sau $f, g \in \mathbb{Z}_p[X]$ unde p număr prim.

Atunci există şi sunt unice polinoamele $q, r \in K[X]$ cu

$$f(X) : g(X) = q(X) \text{ rest } r(X)$$

Obs.: proba împărţirii

$$f(X) = g(X) \cdot q(X) + r(X) \text{ unde } gr\ r(\mathrm{X}) < gr\ g(X)$$

Obs.2: relaţia este adevărată şi dacă $f, g \in \mathbb{Z}_n[X]$ cu n nu neapărat număr prim, însă atunci condiţia este ca să avem coeficientul dominant al lui $g(X)$ inversabil în $\mathbb{Z}_n[X]$

Obs.3: Dacă se cere restul împărţirii unui polinom f la polinomul g, calculăm rădăcinile lui g, descompunem g în factori, scriem teorema împărţirii, apoi proba împărţirii şi calculăm valorile lui f în rădăcinile polinomului g, de unde obţinem restul

Obs.:4 Dacă polinomul g are rădăcini multiple, atunci derivăm relaţia obţinută din proba împărţirii

7. Restul împărţirii unui polinom la polinoame de gradul I

Restul lui $f:(X-\alpha)$ este $f(a)$

8. Polinoame divizibile

Fie $f,g\in K[X]$. Spunem că g **divide pe** f şi notăm g/f dacă şi numai dacă există un polinom $q\in K[X]$ astfel încât $f=g\cdot q$.

Obs.1: g divide pe f (notat g/f) este echivalent cu f divizibil cu g (notat $f\,\vdots\,g$)

Obs.2: g divide pe f $\Leftrightarrow$ restul împărţirii lui f la g este zero

Obs.3: g divide pe f $\Leftrightarrow$ toate rădăcinile lui g sunt rădăcini pentru f

9. Teorema lui Bezout:

f divizibil prin $(X-a)\Leftrightarrow f(a)=0$

10. Polinoame prime între ele:

Două polinoame f,g sunt prime între ele $\Leftrightarrow (f,g)=\alpha\in\mathbb{C}^*$

11. Proprietăţi ale rădăcinilor

$\forall$ polinom $f\in\mathbb{R}[X]$ are un număr par de rădăcini complexe şi

$\forall$ polinom $f\in\mathbb{R}[X]$ de grad impar are cel puţin o rădăcină reală

$\forall$ polinom $f\in\mathbb{R}[X]$ de grad n are n rădăcini complexe, nu neapărat distincte

$\forall$ polinom $f\in\mathbb{R}[X]$ de grad n care are are n rădăcini reale distincte schimbă semnul în fiecare rădăcină

12. Fie K un corp comutativ. Un element $a\in K$ se numeşte **rădăcină multiplă de ordin "*k*" a polinomului** $f\in K[X]$ dacă $(X-a)^k/f$ şi $(X-a)^{k+1}\not/ f$

Obs.1: $x=\alpha$ e rădăcina multiplă de ordin k

$$1 \le k \le n \text{ dacă : } \begin{cases} f(\alpha)=0 \\ f'(\alpha)=0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ f^{(k-1)}(\alpha)=0 \end{cases} \quad \text{şi} \quad f^{(k)}(\alpha) \ne 0$$

Obs.2: dacă $p=1$ rădăcina se numeşte simplă, dacă $p=2$ rădăcina se numeşte dublă, dacă $p=3$ avem rădăcină triplă

13. f **este reductibil în** $K[X] \Leftrightarrow \exists g, h \in K[X]$ a.î. $f = g \cdot h$, unde $1 <$ grad $g <$ grad f şi $1 <$ grad $h <$ grad f

Obs.1: Dacă f are rădăcini în $K \Rightarrow f$ este reductibil în $K[X]$

Obs 2: $\exists$ polinoame care nu au nici o rădăcina în K, dar care sunt reductibile.

f **este ireductibil în** $K[X] \Leftrightarrow$ nu există $g, h \in K[X]$ a.î. $f = g \cdot h$, unde $1 <$ grad $g <$ grad f , $1 <$ grad $h <$ grad f

14. Polinoame ireductibile

a) peste $\mathbb{R}$**,** singurele polinoame ireductibile sunt $f = ax + b, a \ne 0$ şi $f = ax^2 + bx + c, a \ne 0, \Delta < 0$

b) peste $\mathbb{C}$**,** singurul polinom ireductibil este $f = ax + b, a \ne 0$

Obs.1: $\forall$ polinom de grad ≥ 3 se descompune în $\mathbb{R}$ (este reductibil)

Obs.2: Există polinoame reductibile peste $\mathbb{R}$ care nu au nicio rădăcină în $\mathbb{R}$

15. Relaţiile lui Viete în caz general $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots\ldots\ldots + a_1 x + a_0 = 0$

$$\begin{cases} s_1 = x_1 + x_2 + \ldots + x_n = -\dfrac{a_{n-1}}{a_n} \\ s_2 = x_1 x_2 + x_1 x_3 + \ldots + x_{n-1} x_n = \dfrac{a_{n-2}}{a_n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ s_n = x_1 x_2 \ldots\ldots x_n = (-1)^n \cdot \dfrac{a_0}{a_n} \end{cases}$$

16. Relaţiile lui Viete la ecuaţia de grad III $ax^3+bx^2+cx+d=0$

$$\begin{cases} s_1 = x_1 + x_2 + x_3 = -\dfrac{b}{a} \\ s_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \dfrac{c}{a} \\ s_3 = x_1x_2x_3 = -\dfrac{d}{a} \end{cases}$$

17. Relaţiile lui Viete la ec. de grad IV $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$

$$\begin{cases} s_1 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -\dfrac{b}{a} \\ s_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = \dfrac{c}{a} \\ s_3 = x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = -\dfrac{d}{a} \\ s_4 = x_1x_2x_3x_4 = \dfrac{e}{a} \end{cases}$$

18. Condiţia ca rădăcinile unei ecuaţii de grad III să fie în:

a) progresie aritmetică: $x_1 = a - r, x_2 = a, x_3 = a + r$

b) progresie geometrică: $x_1 = \dfrac{a}{q}, x_2 = a, x_3 = a \cdot q$

19. Condiţia ca rădăcinile unei ecuaţii de grad IV să fie în:

a) progresie aritmetică: $x_1 = a - 3r, x_2 = a - r, x_3 = a + r, x_4 = a + 3r$

b) progresie geometrică: $x_1 = \dfrac{a}{q^3}, x_2 = \dfrac{a}{q}, x_3 = a \cdot q, x_4 = a \cdot q^3$

20. Determinarea sumei pătratelor rădăcinilor unei ecuaţii :

$$x_1^2 + x_2^2 + ...x_n^2 = \left(x_1 + x_2 + ...x_n\right)^2 - 2\left(x_1x_2 + x_1x_3 + ...x_{n-1}x_n\right)$$

21. Formarea unei ecuaţii de gradul "n" dacă ştim rădăcinile (ecuaţie ataşată)

$$x^n - s_1x^{n-1} + s_2x^{n-2} - ... + (-1)^n s_n = 0$$

22. Determinarea sumei puterilor asemenea ale rădăcinilor unei ecuaţii de grad 3 $ax^3+bx^2+cx+d=0$, se cere $S_3=x_1^3+x_2^3+x_3^3$

E1) calculăm $S_1=x_1+x_2+x_3=-\frac{b}{a}$

E2) calculăm $S_2=x_1^2+x_2^2+x_3^2=(s_1)^2-2s_2=\left(-\frac{b}{a}\right)^2-2\cdot\frac{c}{a}$

E3) pentru a calcula $S_3=x_1^3+x_2^3+x_3^3$, înlocuim x_1 în ecuaţie, apoi x_2, x_3, se adună şi se obţine $aS_3+bS_2+cS_1+3d=0$

E4) pentru a calcula $S_4=x_1^4+x_2^4+x_3^4$, înmulţim fiecare ecuaţie cu x_i şi adunăm relaţiile

Obs.: pentru a determina $S_{-1}=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}$, aducem la acelaşi numitor $\Rightarrow S_{-1}=\frac{x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1}{x_1x_2x_3}=\frac{s_2}{s_3}$

23. Găsirea rădăcinilor întregi (raţionale) pentru o ecuaţie cu coeficienţi întregi

Dacă $f\in\mathbb{Z}[X]$ singurele rădăcini întregi sunt printre divizorii termenului liber. Dacă niciunul din aceşti divizori nu e rădăcină, atunci polinomul nu are rădăcini întregi.

Dacă $f\in\mathbb{Q}[X]$ singurele rădăcini raţionale sunt printre $\frac{\text{divizorii termenului liber}}{\text{divizorii coeficientului dominant}}$. Dacă niciunul din aceşti divizori nu e rădăcină, atunci polinomul nu are rădăcini raţionale.

24. Ecuaţii reciproce: coeficienţii termenilor egal depărtaţi de extremi sunt egali

Obs: Ecuaţiile reciproce de grad impar au pe $x=-1$ soluţie

Ecuaţii reciproce de grad III: au rădăcină pe $x=-1$,
- se împart la $x+1$, se obţine $(x+1)(\text{ec. de grad II})=0 \Rightarrow x=-1$ sau ec. de grad II=0 $\Rightarrow x_{2,3}$

Ecuaţii reciproce de gradul IV -se precizează $x=0$ nu e soluţie**,** se împarte la x^2 apoi notăm $x+\frac{1}{x}=t \Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=t^2-2$

E4) $t_{1,2}=\ldots$ revenim la notaţia $x+\frac{1}{x}=t$

Ecuaţii reciproce de gradul V - se împarte la $x+1$**,** se obţine $(x+1)(\text{ec. reciprocă de grad IV})=0 \Rightarrow x=-1$ sau ecuaţia reciprocă de grad IV = 0 $\Rightarrow$ punctul anterior

Capitolul XVIII
ŞIRURI(XI)

1. Demonstrarea monotoniei unui şir:

Met I: Criteriul diferenţei – calculăm diferenţa $x_{n+1}-x_n$ şi dacă:

$x_{n+1}-x_n>0 \Leftrightarrow x_{n+1}>x_n \Leftrightarrow x_n\ s\nearrow$

$x_{n+1}-x_n<0 \Leftrightarrow x_{n+1}<x_n \Leftrightarrow x_n\ s\searrow$

$x_{n+1}-x_n\geq 0 \Leftrightarrow x_{n+1}\geq x_n \Leftrightarrow x_n\nearrow$

$x_{n+1}-x_n\leq 0 \Leftrightarrow x_{n+1}\leq x_n \Leftrightarrow x_n\searrow$

Met II: Criteriul raportului – valabil doar pentru şiruri cu toţi termenii pozitivi, calculăm raportul $\frac{x_{n+1}}{x_n}$ şi dacă:

$\frac{x_{n+1}}{x_n}>1 \Leftrightarrow x_{n+1}>x_n \Leftrightarrow x_n\ s\nearrow$ $\frac{x_{n+1}}{x_n}<1 \Leftrightarrow x_{n+1}<x_n \Leftrightarrow x_n\ s\searrow$

$\frac{x_{n+1}}{x_n}\geq 1 \Leftrightarrow x_{n+1}\geq x_n \Leftrightarrow x_n\nearrow$ $\frac{x_{n+1}}{x_n}\leq 1 \Leftrightarrow x_{n+1}\leq x_n \Leftrightarrow x_n\searrow$

2. Demonstrarea mărginirii unui şir:

se dau valori, se intuiesc capetele, se arată că $x_n\in[\alpha;\beta]$

3. Dreaptă reală încheiată $\overline{\mathbb{R}}=\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$

4. x_n **are limita** α dacă $\exists\alpha\in\overline{\mathbb{R}}$ de care se apropie toţi termenii şirului începând cu un anumit rang, când $n\to\infty$.

5. $\forall$ **şir monoton are limită (finită sau infinită).**

6. x_n **este convergent la** $\alpha \Leftrightarrow x_n$ are limită finită.

Obs.: pentru a demonstra că un şir e convergent, sau arătăm că x_n monoton şi mărginit, sau arătăm că e monoton, deci are limită şi trecem la limită în relaţia iniţială şi obţinem limita finită

7. x_n **- divergent** – termenii şirului nu se apropie de un număr real (deci sau nu se apropie de nimic, sau se apropie de $\pm\infty$)

8. Şiruri remarcabile

a) Dacă $P(n)=a_p n^p + a_{p-1}n^{p-1}+....+a_1 n + a_0$, atunci

$\lim\limits_{n\to\infty} P(n)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_p n^p\right)$, adică limita termenului de grad maxim

b) Fie $P(n)=a_p n^p + a_{p-1}n^{p-1}+....a_1 n + a_0, Q(n)=b_q n^q + b_{q-1}n^{q-1}+....+b_1 n + b_0$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{P(n)}{Q(n)}=\begin{cases} 0, grP < grQ \\ \frac{a_p}{b_q}, grP = grQ \\ \operatorname{sgn}\left(\frac{a_p}{b_q}\right)\cdot\infty, grP > grQ \end{cases}$$ sau prin factor forţat

c) $$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} \nexists, q\le -1 \\ 0, q\in(-1;1) \\ 1, q=1 \\ \infty, q>1 \end{cases}$$

d) $\lim\limits_{x_n\to\infty}\frac{\ln x_n}{x_n}=0$ e) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{P(n)}{a^n}=0, \forall a>1$

f) $\lim\limits_{n\to\infty}\log_b n=\infty, b>1$ şi $\lim\limits_{n\to\infty}\log_b n=-\infty, b\in(0,1)$

9. Operaţii cu limite de şiruri

$\alpha,\infty,-\infty$ sunt limite de şiruri şi nu numere din $\overline{\mathbb{R}}$, iar α o limită ce aparţine lui $\mathbb{R}$.

a) $$\frac{\alpha}{+0}\Rightarrow\begin{cases} -\infty, \alpha<0 \\ ?, \alpha=0 \\ \infty, \alpha>0 \end{cases}$$ b) $$\frac{\alpha}{-0}\Rightarrow\begin{cases} \infty, \alpha<0 \\ ?, \alpha=0 \\ -\infty, \alpha>0 \end{cases}$$

c) $\frac{\alpha}{\pm\infty}=0$ d) $\infty^{\infty}\to\infty$ e) $\infty^{-\infty}\to 0$

10. Subşir al unui şir dat : este un şir format cu o infinitate de termeni ai şirului iniţial.

Obs 1: Dacă $x_n \to l \Rightarrow \forall$ subşir $x_{k_n} \to l$;

Obs 2: Dacă toate subşirurile care completează un şir dat au limita l atunci şi $x_n \to l$

Obs 3: Dacă un şir are 2 subşiruri care au limite diferite atunci şirul iniţial nu are limită.

11. Metodă de a arăta că şirurile trigonometrice nu au limită

Exp.: Se cere: $\lim\limits_{n\to\infty}\cos(n\pi) = ?$

E1) $n = 2k \to \infty \Rightarrow \cos x_n = \cos(2k\pi) = \cos 0 = 1 \to 1;$

$n = 2k+1 \to \infty \Rightarrow \cos x_n = \cos((2k+1)\pi) = \cos\pi = -1 \to -1;$

Deoarece avem 2 subşiruri cu limită diferită, rezultă că şirul iniţial nu are limită.

12. Cazuri exceptate $\infty - \infty$; $\dfrac{\infty}{\pm\infty}$; $\dfrac{0}{0}$; $\infty \cdot 0$; 1^{∞}; ∞^0; 0^0; 0^{∞}

Obs: În cazurile exceptate 0 şi 1 nu sunt numere ci limite de şiruri.

Ex : $\lim\limits_{n\to\infty} 1^{\infty} = 1$ însă $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n+2}\right)^n =$ caz exceptat

13. Limite remarcabile – sunt limite presupuse cunoscute şi la care se ajunge printr-o schimbare de variabilă adecvată:

a) $\lim\limits_{x_n\to 0}\dfrac{\sin x_n}{x_n} = 1$ $\lim\limits_{x_n\to 0}\dfrac{tgx_n}{x_n} = 1$

$\lim\limits_{x_n\to 0}\dfrac{\arcsin x_n}{x_n} = 1$ $\lim\limits_{x_n\to 0}\dfrac{\mathrm{arc}\,tgx_n}{x_n} = 1$

b) $\lim\limits_{x_n\to 0}\dfrac{a^{x_n}-1}{x_n} = \ln a$ c) $\lim\limits_{x_n\to 0}\dfrac{\ln(1+x_n)}{x_n} = 1$

d) $\lim\limits_{x_n\to 0}\dfrac{(1+x_n)^p - 1}{x_n} = p$ e) $\lim\limits_{x_n\to 0}(1+x_n)^{\frac{1}{x_n}} = e$ f) $\lim\limits_{x_n\to\infty}\dfrac{\ln x_n}{x_n} = 0$

14. Produsul unui şir convergent la 0 cu un şir mărginit dă un şir convergent la 0 $\left.\begin{array}{l} x_n \to 0 \\ y_n - \text{mărginit} \end{array}\right\} \Rightarrow x_n \cdot y_n \to 0$

15. Convergenţa la 0 este echivalentă cu convergenţa modulului la 0 $x_n \to 0 \Leftrightarrow |x_n| \to 0$

16. Criteriul majorării $|x_n - x| \le y_n$ şi $y_n \to 0 \Rightarrow x_n \to x$

17. Criteriul cleştelui $a_n < b_n < c_n$ şi $\left.\begin{array}{l} a_n \to l \\ c_n \to l \end{array}\right\} \Rightarrow b_n \to l$

18. Calcularea limitei unei sume cu ajutorul criteriului cleştelui
E1) Se încadrează fiecare termen al sumei în funcţie de cel mai mic, respectiv cel mai mare termen al sumei.
E2) Se adună inegalităţile.
E3) Dacă şirurile laterale au aceeaşi limită, atunci şirul are limita respectivă.
Obs: De obicei, termenii se încadrează doar modificând numitorii, numărătorii rămânând neschimbaţi.

19. Cazul exceptat : $\infty - \infty$
Met I: Se dă factor comun forţat cel mai mare termen.
Met II: Dacă apar radicali se raţionalizează.

20. Cazul exceptat : $\frac{\infty}{\pm\infty}$ **sau** $\frac{0}{0}$**.** Se dă factor comun forţat, se descompune numărătorul şi numitorul, se simplifică sau limite remarcabile.

21. Cazul exceptat : $0 \cdot \infty$ **sau** $\infty \cdot 0$**.** Se transformă în cazul $\frac{\infty}{\infty}$ sau $\frac{0}{0}$, folosind $f \cdot g = \frac{f}{\frac{1}{g}}$

22. Cazul exceptat : 1^{∞} înseamnă $(x_n)^{y_n}$, unde $x_n \to 1$ şi $y_n \to \infty$

E1) Se adună şi se scade cifra 1 la şirul de la bază şi se obţine $(1+x_n-1)^{y_n}$.

E2) Se scrie $\left(\left(1+(x_n-1)\right)^{\frac{1}{x_n-1}}\right)^{(x_n-1)\cdot y_n}$, iar puterea se pune inversată faţă de (x_n-1).

E3) Se foloseşte $\lim\limits_{x_n\to 0}(1+x_n)^{\frac{1}{x_n}} = e$ şi că $\lim\limits_{n} e^{\cdots} = e^{\lim\limits_{n}\ldots}$.

23. Cazul exceptat : ∞^0 **,** 0^0 **,** 0^{∞}

E1) Se foloseşte $f^g = e^{g\ln f}$.

E2) Se ia separat $e^{\lim\ldots}$, fie $l_1 = \lim\ldots$ care este una din limitele standard de mai sus.

24. Lema lui Cesaro-Stolz pentru $\frac{\infty}{\infty};\frac{0}{0}$ **:**

Dacă se cere $\lim\limits_{n}\frac{a_n}{b_n}, b_n \nearrow$ şi nemărginit $\left(\text{respectiv } b_n \searrow \text{ la } 0\right)$ şi se poate calcula $\lim\limits_{n}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = l \in \overline{\mathbb{R}}$, atunci şi $\lim\limits_{n}\frac{a_n}{b_n} = l$.

25. Criteriul radicalului Dacă se cere $\lim\limits_{n}\sqrt[n]{x_n}$ şi se poate calcula $\lim\limits_{n}\frac{x_{n+1}}{x_n} = l \in \overline{\mathbb{R}}$, atunci şi $\lim\limits_{n}\sqrt[n]{x_n} = l$.

26. Criteriul raportului Dacă $\lim\limits_{n}\frac{a_{n+1}}{a_n} \to l \in [0,1) \Rightarrow a_n \to 0$

Dacă $\lim\limits_{n}\frac{a_{n+1}}{a_n} \to l \in (1;\infty] \Rightarrow a_n \to \pm\infty$

Dacă $\lim\limits_{n}\frac{a_{n+1}}{a_n} \to 1$, atunci nu putem determina limita lui a_n

27. Şiruri recurente de ordinul I

Monotonia: se foloseşte inducţia matematică

E1) Se calculează a_2, se compară a_1 cu a_2;

E2) Fie $P(n): a_n < a_{n+1}$ sau $a_n > a_{n+1}$ în funcţie de E1);

E3) Se demonstrează prin inducţie, preferabil folosind: „Presupunem $P(k+1)$ adevărat $\Leftrightarrow ... \Leftrightarrow$ adevărat” şi exprimăm şirul cu relaţia de recurenţă.

Obs: pentru a arăta că un şir nu este monoton, calculăm câţiva termeni si arătam $x_1 < x_2 > x_3$; $x_1 > x_2 < x_3$ sau orice altă combinaţie.

Mărginirea: se foloseşte inducţia matematică

E1) Din monotonie $\Rightarrow a_n < a_1$ sau $a_n > a_1$, deci avem un capăt;

E2) Celălalt capăt este posibila limită a şirului.

Se redactează „posibila limită finită a şirului este l astfel încât: $l = ...$, de unde obţinem $l = ...$”;

Obs.: Dacă obţinem o contradicţie atunci limita şirului este $\pm\infty$, căci orice şir monoton are limită, iar faptul că limita este ∞ sau $-\infty$ deducem din monotonie

E3) Arătăm prin inducţie propoziţia

$P(n): a_n < l$ sau $a_n > l$, folosind „Presupunem $P(k+1)$ adevărat $\Leftrightarrow ... \Leftrightarrow$ adevărat” şi exprimând şirul cu relaţia de recurenţa.

Obs: dacă nu ştim monotonia şirului, calculăm primele valori, observăm monotonia şi arătăm prin inducţie mărginirea cu primul termen al şirului. Dacă s-a folosit inducţia la monotonie, atunci nu mai este necesară inducţia la acest prim capăt.

Capitolul XIX
LIMITE DE FUNCŢII. FUNCŢII CONTINUE. ASIMPTOTE. PROPRIETATEA LUI DARBOUX (XI)

1. f **are limita egală cu** $l \in \overline{\mathbb{R}}$ în $x = a \Leftrightarrow \exists \lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = l$

2. Limitele funcţiilor elementare în puncte ale domeniului se găsesc înlocuind x cu α, însă dacă se obţine caz exceptat, se folosesc metode de la cazurile exceptate întâlnite la şiruri.

3. Limite laterale a) limită la stânga: $l_s(\alpha) = f(\alpha - 0) = \lim\limits_{\substack{x \to \alpha \\ x < \alpha}} f(x)$

b) limită la dreapta: $l_d(\alpha) = f(\alpha + 0) = \lim\limits_{\substack{x \to \alpha \\ x > \alpha}} f(x)$

Obs.: Dacă f are limite laterale în $x = a$ atunci

$$\left(f \text{ are limită în } x = \alpha \Leftrightarrow l_s(\alpha) = l_d(\alpha) \right)$$

4. Limitele funcţiilor elementare în puncte de acumulare ce nu aparţin domeniului

Fie a un număr real finit

a) limita funcţiei constante

$\lim\limits_{x \to a} c = c$, $\lim\limits_{x \to \infty} c = c$, $\lim\limits_{x \to -\infty} c = c$, $\forall c$ constantă

b) limita funcţiei polinomiale $f = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$

$$\lim_{x \to a} P(n) = a_n a^n + a_{n-1} a^{n-1} + ... + a_1 a + a_0$$

$$\lim_{x \to \infty} P(n) = \lim_{x \to \infty} \left(a_n x^n \right) \qquad \lim_{x \to -\infty} P(n) = \lim_{x \to -\infty} \left(a_n x^n \right)$$

Obs.: limita la $\pm\infty$ a unei funcţii polinomiale este egală cu limita termenului de grad maxim

c) limita funcţiei raţionale $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{P(X)}{Q(X)} = \dfrac{P(a)}{Q(a)}$

Obs.: Atunci când numitorul este un şir ce tinde la 0 contează semnul numitorului, iar dacă numitorul poate fi ± 0, se calculează limitele laterale (pentru a-i găsi semnul e indicat tabelul de semne).

Exp.: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{1}{x}=-\infty \qquad \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{1}{x}=\infty$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\begin{cases}\operatorname{sgn}\left(\frac{a_n}{b_m}\right)\cdot\infty, & \operatorname{grad} f>\operatorname{grad} g\\ \frac{a_n}{b_m}, & \operatorname{grad} f=\operatorname{grad} g\\ 0, & \operatorname{grad} f<\operatorname{grad} g\end{cases}$$ sau factor forţat

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\begin{cases}\operatorname{sgn}\left(\frac{a_n}{b_m}\right)\cdot(-\infty)^{\operatorname{grad} f-\operatorname{grad} g}, & \operatorname{grad} f>\operatorname{grad} g\\ \frac{a_n}{b_m}, & \operatorname{grad} f=\operatorname{grad} g\\ 0, & \operatorname{grad} f<\operatorname{grad} g\end{cases}$$ sau factor forţat

Exp.2: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0 \qquad \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$

d) limita funcţiei logaritmice

dacă $b\in(1,\infty)\Rightarrow \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\log_b x=-\infty$ şi $\lim\limits_{x\to\infty}\log_b x=\infty$

dacă $b\in(0,1)\Rightarrow \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\log_b x=\infty$ şi $\lim\limits_{x\to\infty}\log_b x=-\infty$

g) limita funcţiilor trigonometrice $\nexists\lim\limits_{x\to\infty}\sin x \qquad \nexists\lim\limits_{x\to\infty}\cos x$

$\lim\limits_{\substack{x\to\pi/2\\ x<\pi/2}} tgx=\infty \qquad \lim\limits_{\substack{x\to\pi/2\\ x>\pi/2}} tgx=-\infty \qquad \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} ctgx=\infty$

$\lim\limits_{\substack{x\to\pi\\ x<\pi}} ctgx=-\infty \qquad \lim\limits_{x\to\infty} arctgx=\frac{\pi}{2} \qquad \lim\limits_{x\to-\infty} arctgx=-\frac{\pi}{2}$

5. Reguli de calcul în $\overline{\mathbb{R}}$, notăm cazurile exceptate cu **?**

$a+\infty=\infty$	$a-\infty=-\infty$
$\infty+\infty=\infty$	$-\infty-\infty=-\infty$
$\infty-\infty=?$	$-\infty+\infty=?$
$a>0\Rightarrow a\cdot\infty=\infty$	$a<0\Rightarrow a\cdot\infty=-\infty$
$a>0\Rightarrow a\cdot(-\infty)=-\infty$	$a<0\Rightarrow a\cdot(-\infty)=\infty$
$\infty\cdot\infty=\infty$	$-\infty\cdot(-\infty)=\infty$
$\infty\cdot(-\infty)=-\infty$	$0\cdot(\pm\infty)=?$
$a>0\Rightarrow \frac{\infty}{a}=\infty$	$a<0\Rightarrow \frac{\infty}{a}=-\infty$
$a>0\Rightarrow \frac{-\infty}{a}=-\infty$	$a<0\Rightarrow \frac{-\infty}{a}=\infty$
$\frac{1}{+0}=\infty$	$\frac{1}{-0}=-\infty$
$\frac{1}{\pm\infty}=0$	$\frac{a}{0}=?$
$\frac{\pm\infty}{\pm\infty}=?$	$\frac{0}{0}=?$
$a\in(1,\infty)\Rightarrow a^{\infty}=\infty$	$a\in(0,1)\Rightarrow a^{\infty}=0$
$a\in(1,\infty)\Rightarrow a^{-\infty}=0$	$a\in(0,1)\Rightarrow a^{-\infty}=\infty$
$b\in(0,\infty)\Rightarrow \infty^{b}=\infty$	$b\in(-\infty,0)\Rightarrow \infty^{b}=0$
$\infty^{\infty}=\infty$	$\infty^{-\infty}=0$
$1^{\pm\infty}=?$	$\infty^{0}=?$
$0^{0}=?$	$0^{\infty}=?$

6. Cazuri exceptate (operaţii fără sens, nedeterminări)

$\infty-\infty$	$\infty\cdot 0$	$\frac{\infty}{\infty}$	$\frac{0}{0}$
1^{∞}	0^{0}	∞^{0}	0^{∞}

7. Comutarea limitei cu funcţia Dacă f este o funcţie elementară, atunci $\lim\limits_{x\to a} f\left(g\left(x\right)\right)=f\left(\lim\limits_{x\to a} g\left(x\right)\right)$

Exp.: $\lim\limits_{x\to 0}\cos\left(\sin x\right)=\cos\lim\limits_{x\to 0}\left(\sin x\right)=\cos 0=1$

Obs.: limita modulului este egală cu modulul limitei, adică

$\lim\limits_{x\to a}\left|f\left(x\right)\right|=\left|\lim\limits_{x\to a} f\left(x\right)\right|$

8. Metoda substituţiei(a schimbării variabilei sau a notaţiei)
Deoarece toate limitele remarcabile au argumentul ce tinde la 0 sau la ∞, dacă avem o limită la care argumentul nu tinde la 0, nici la ∞ notând ajungem la o limită cu argumentul ce tinde la 0 sau la ∞
Obs.: Dacă avem $x\to-\infty$,e indicată notaţia $t=-x\Rightarrow t\to\infty$ sau, fără a nota trebuie reţinut că $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt[2k]{x^{2k}})=|x|=-x$

9. Asimptote – drepte faţă de care se apropie G_f, fără a-l atinge în direcţia respectivă. Se prescurtează „as”.
Asimptotele sunt de 3 tipuri:
a) <u>asimptote orizontale</u>: $\exists$ doar dacă D_f nemărginit.
Dacă $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=l\in\mathbb{R}\Rightarrow y=l$ as. orizontala spre $-\infty$.
Dacă $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=l\notin\mathbb{R}$ sau dacă $\nexists\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\Rightarrow$ G_f nu are asimptotă orizontală spre $-\infty$.
Dacă $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=l\in\mathbb{R}\Rightarrow y=l$ as. orizontală spre ∞.
Dacă $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=l\notin\mathbb{R}$ sau dacă $\nexists\ \lim\limits_{x\to\infty} f(x)\Rightarrow$ G_f nu are asimptotă orizontală spre ∞.
b) <u>asimptote oblice</u>: $\exists$ doar dacă D_f nemărginit şi dacă nu există asimptote orizontale în direcţia respectivă.
Fie $m=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}$
Dacă $m\in\mathbb{R}\Rightarrow\ n=\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-mx]\in\mathbb{R}\Rightarrow\ y=mx+n$ este asimptotă oblică spre $-\infty$.

Dacă $n \notin \mathbb{R}$ sau dacă $\nexists\ n = \lim_{x \to -\infty} [f(x) - mx]$ atunci G_f nu are asimptotă oblică spre $-\infty$.

Fie $m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}$

Dacă $m \in \mathbb{R} \Rightarrow n = \lim_{x \to \infty} [f(x) - mx] \in \mathbb{R} \Rightarrow y = mx + n$ este asimptotă oblică spre ∞.

Dacă $n \notin \mathbb{R}$ sau dacă $\nexists\ n = \lim_{x \to \infty} [f(x) - mx]$ atunci G_f nu are asimptotă oblică spre ∞.

c) <u>asimptote verticale</u>: se calculează în capetele deschise ale domeniului (de obicei în punctele găsite din condiţii).

$\lim_{\substack{x \to \alpha \\ x < \alpha}} f(x) = \pm\infty \Rightarrow x = \alpha$ asimptotă verticală la stânga.

$\lim_{\substack{x \to \alpha \\ x > \alpha}} f(x) = \pm\infty \Rightarrow x = \alpha$ asimptotă verticală la dreapta.

Obs 1: O funcţie poate avea asimptotă orizontală spre $-\infty$ şi asimptotă oblică spre ∞.

Obs 2: Sunt funcţii care nu au nici un fel de asimptote, dar şi funcţii care au o infinitate de asimptote verticale.

10. f **continua în** $x = \alpha \Leftrightarrow \lim_{x \to \alpha} f(x) = f(\alpha)$ notăm $f \in C_{x=\alpha}$

Obs.1. continuitatea se studiaza doar în puncte din D_f

11. Studierea continuităţii unei funcţii cu acolade

TIP I. Fie $f(x) = \begin{cases} f_1(x), x < \alpha \\ f_2(x), x \geq \alpha \end{cases}$

Funcţia f este continuă în $x = \alpha \Leftrightarrow \lim_{\substack{x \to \alpha \\ x < \alpha}} f(x) = \lim_{\substack{x \to \alpha \\ x > \alpha}} f(x) = f(\alpha)$

TIP II. Fie $f(x) = \begin{cases} f_1(x), x \in \mathbb{Q} \\ f_2(x), x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

Funcţia f este continuă în $x = \alpha \Leftrightarrow \lim_{\substack{x \to \alpha \\ x \in \mathbb{Q}}} f(x) = \lim_{\substack{x \to \alpha \\ x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}}} f(x) = f(\alpha)$

12. α $\in D_f$ **e punct de discontinuitate** $\Leftrightarrow$ $\alpha \in D_f$ şi $f \notin C_{x=\alpha}$

pct. de disc de I speţă: $f \notin C_{x=\alpha} \Leftrightarrow \exists l_s(\alpha) \in \mathbb{R}, \exists l_d(\alpha) \in \mathbb{R}$

pct. de disc de II speţă: $f \notin C_{x=\alpha}$ şi α nu e de prima speţă

Obs.1.: $x = \alpha$ este punct de discontinuitate de I speţă dacă verifică una din condiţiile:

a) $l_s(\alpha) \neq l_d(\alpha)$ sau

b) $l_s(\alpha) = l_d(\alpha) \neq f(\alpha)$

Obs.2: f monotonă $\Rightarrow f$ poate avea discontinuitate de I-a speţă.

13. f continuă pe I $\Rightarrow f$ nu îşi schimbă semnul decât în rădăcini.

Obs.1. Acest rezultat se folosea în clasa a IX-a atunci când în tabelul de semne al unei inecuaţii, semnul se putea schimba doar când apărea 0 sau bară.

Obs.2: f continuă pe (a,b) şi $f(a) \cdot f(b) < 0 \Rightarrow \exists c \in (a;b)$ a.î. $f(c) = 0$

Acest număr c nu e neapărat unic, însă dacă ştim că f e strict monotonă, atunci rădăcina c va fi unică.

Obs.3: Dacă $f:[a,b] \to [a,b]$, f continuă pe $[a,b] \Rightarrow$ ecuaţia $f(x) = x$ are cel puţin o rădăcină în intervalul $[a;b]$.

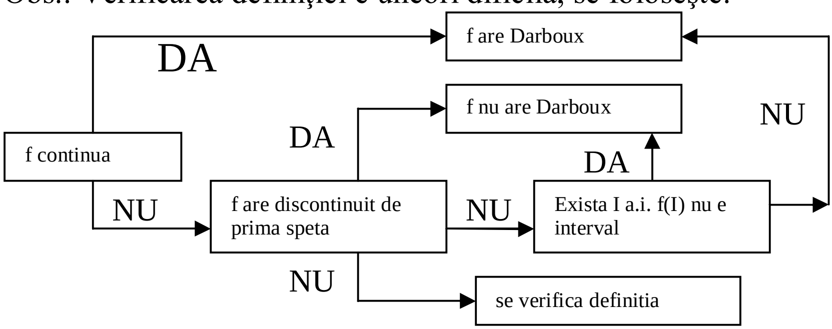
14. O funcţie continuă şi injectivă este strict monotonă

15. Funcţii cu proprietatea lui Darboux

$f:(a,b) \Rightarrow \mathbb{R}, f \in Db \Leftrightarrow \forall \lambda \in (f(a), f(b)) \cup (f(b), f(a))$

$\exists c \in (a;b)$ a.î. $f(c) = \lambda$

Obs.: Verificarea definiţiei e uneori dificilă, se foloseşte:



Capitolul XX
FUNCŢII DERIVABILE (XI)

1. Funcţia f **este derivabilă în** $x=\alpha \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}\in\mathbb{R}$

Obs1.: $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}=f'(\alpha)$ $\qquad \lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(h+\alpha)-f(\alpha)}{h}=f'(\alpha)$

Obs.2: există derivatele laterale

$$f'_s(\alpha)=\lim\limits_{\substack{x\to\alpha\\x<\alpha}}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha} \quad \text{şi} \quad f'_d(\alpha)=\lim\limits_{\substack{x\to\alpha\\x>\alpha}}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$$

2. f **are derivată în** $x=\alpha\in D_f\cap D'_f \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}\in\overline{\mathbb{R}}$

(poate fi număr sau $\pm\infty$)

3. Studierea derivabilităţii unei funcţii cu acolade

Fie $f(x)=\begin{cases} f_1(x), x<\alpha\\ f_2(x), x\ge\alpha\end{cases}$. Pentru a studia derivabilitatea funcţiei în $x=\alpha$ avem etapele:

Etapa I. Arătăm că funcţia este continuă în $x=\alpha$

Etapa II. Arătăm că: $\lim\limits_{\substack{x\to\alpha\\x<\alpha}}\dfrac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}=\lim\limits_{\substack{x\to\alpha\\x>\alpha}}\dfrac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$

Obs.1: dacă f nu e continuă $\Rightarrow f$ nu e derivabilă

Obs.2: Etapa I este opţională, dacă avem $f'_s(\alpha)=f'_d(\alpha)$, atunci nu mai facem continuitatea, însă dacă se cere determinarea unor constante astfel încât o funcţie să fie derivabilă, atunci e necesară şi continuitatea

Obs.3: dacă f derivabilă $\Rightarrow f$ continuă, reciproc NU.

4. Tabel cu derivate de memorat

$(C)'=0$	$(x^a)=a\cdot x^{a-1}$	$(\ln x)'=\frac{1}{x}$
$(a^x)=a^x\cdot\ln a$	$(\sin x)'=\cos x$	$(\cos x)'=-\sin x$
$(tgx)'=\frac{1}{\cos^2 x}$	$(ctgx)'=-\frac{1}{\sin^2 x}$	$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\mathrm{arc}\,tgx)'=\frac{1}{1+x^2}$	$(\mathrm{arc}\,ctgx)'=-\frac{1}{1+x^2}$

Tabel cu derivate ce se pot deduce

$x'=1,\quad (e^x)'=e^x$	$\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$	$(\log_b x)'=\frac{1}{x\ln b}$
$(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(\sqrt[3]{x})'=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$	$(\sqrt[n]{x})'=\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$

5. Operatii cu funcţii derivabile

a) $(f\pm g)'=f'\pm g'$ b) $(\alpha\cdot f)'=\alpha\cdot f'$

c) $(f\cdot g)'=f'\cdot g+f\cdot g'$ d) $\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'\cdot g-f\cdot g'}{g^2}$

Obs.: există generalizare a derivatei unui produs:

$$(f_1\cdot f_2\cdot\ldots\cdot f_n)'=f_1'\cdot f_2\cdot\ldots\cdot f_n+f_1\cdot f_2'\cdot\ldots\cdot f_n+\ldots+f_1\cdot f_2\cdot\ldots\cdot f_n'$$

6. Derivarea de funcţii compuse interiorul funcţiei nu este doar *x*, ci o funcţie care depinde de x, notată u. Se folosesc formulele:

$(f(u))'=f'(u)\cdot u'$, $\quad (a^u)'=a^u\ln a\cdot u'$, $\quad (u^n)'=n\cdot u^{n-1}\cdot u'$

7. Derivarea funcţiilor care conţin pe *x* atât la bază cât şi la exponent

$$(f^g)'=f^g\ln f\cdot g'+g\cdot f^{g-1}\cdot f'=f^g\cdot\left(\ln f\cdot g'+g\cdot\frac{f'}{f}\right)$$

Obs.: Formula se poate retine mai usor considerand întâi f constant şi derivând ca o exponentiala, apoi g constant si derivand ca o functie putere

8. Ecuaţia tangentei la G_f în punctul de abscisă α

a) Dacă f derivabilă în $x=\alpha \Rightarrow$ ecuaţia tangentei la G_f în $M\left(\alpha, f(\alpha)\right)$ este $y-f(\alpha)=f'(\alpha)\cdot(x-\alpha)$

b) Dacă $f'(\alpha)=\pm\infty$ atunci ecuatia tangentei este $x=\alpha$

Obs.1: Panta tangentei in $M(\alpha, f(\alpha))$ este $m=f'(\alpha)$

9. Determinarea domeniului de derivabilitate - calculăm derivata funcţiei, şi dacă obţinem noi condiţii, studiem cu definiţia dacă funcţia este derivabilă sau nu e derivabilă în acele puncte

10. Calcularea derivatelor de ordinul *n* $\left(\dfrac{1}{x-\alpha}\right)^{(n)}=\dfrac{(-1)^{(n)}\cdot n!}{(x-\alpha)^{n+1}}$

$(\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+\dfrac{n\pi}{2}\right)$ $(\cos x)^{(n)}=\cos\left(x+\dfrac{n\pi}{2}\right)$

11. Formula lui Leibniz $(f\cdot g)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k f^{(n-k)}\cdot g^{(k)}$

12. Rădăcini multiple $x=\alpha$ e rădăcina multiplă de ordin k

$$1\le k\le n \text{ dacă : } \begin{cases} f(\alpha)=0\\ f'(\alpha)=0\\ \dots\dots\dots\dots\\ f^{(k-1)}(\alpha)=0 \end{cases} \quad \text{şi} \quad f^{(k)}(\alpha)\neq 0$$

Obs.: e o condiţie necesară şi suficientă

13. Condiţia ca o funcţie ce conţine module să fi derivabilă :

$f(x)=g(x)\cdot\left|h(x)\right|$ e derivabilă pe $\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ sau h nu are rădăcini reale, sau toate rădăcinile reale ale lui h sunt rădăcini reale ale lui g şi suma ordinelor lor de multiplicitate să fie pară

Obs.: $f(x)=|x-\alpha|+|x-\beta|, \alpha\neq\beta$ nu este derivabilă în $x\in\{\alpha;\beta\}$

Exp.: $f(x)=x|x-\alpha|+2|x-\beta|$ e derivabilă pe $\mathbb{R}\Leftrightarrow \alpha=\beta=-2$

14. Condiţia ca două funcţii să aibă graficele tangente în

$M(\alpha,\beta)$ este ca : $\begin{cases} f(\alpha)=g(\alpha) \\ f'(\alpha)=g'(\alpha) \end{cases}$

15. α **-punct de minim local pentru** $f \Leftrightarrow \exists V \in V_a$

astfel incât $\forall x \in V \cap D_f \Rightarrow f(x) \geq f(\alpha)$

α **-punct de maxim local pentru** $f \Leftrightarrow \exists V \in V_a$

astfel incât $\forall x \in V \cap D_f \Rightarrow f(x) \leq f(\alpha)$

16. Stabilirea monotoniei folosind derivata de ordinul I:

Dacă f derivabilă şi :

$f'(x) > 0 \Rightarrow f_s \nearrow$ $f'(x) < 0 \Rightarrow f_s \searrow$

($f'(x) \geq 0$ şi $f'(x) = 0$ pentru un nr. finit de puncte) $\Rightarrow f_s \nearrow$

($f'(x) \leq 0$ şi $f'(x) = 0$ pentru un nr. finit de puncte) $\Rightarrow f_s \searrow$

$f'(x) \geq 0 \Rightarrow f \nearrow$ $f'(x) \leq 0 \Rightarrow f \searrow$

17. Punctele de extrem ale unei funcţii:

E1) rezolvăm ecuaţia $f'(x) = 0 \Rightarrow x_i$ rădăcini

E2) $x = \alpha$ este punct de extrem dacă este îndeplinită oricare din condiţiile:

a) $f'(\alpha) = 0$ şi f' îşi schimbă semnul în $x = \alpha$ *sau*

b) $\nexists f'(\alpha) = 0, \exists f(\alpha)$ şi f' îşi schimbă semnul în $x = \alpha$ *sau*

c) $x = \alpha$ este capăt închis a D_f

18. Stabilirea mărginirii unei funcţii şi determinarea imaginii unei funcţii folosind tabelul ataşat funcţiei

E1) rezolvăm ecuaţia $f'(x) = 0 \Rightarrow x_i$ rădăcini

E2) găsim semnul lui f'

E3) pe linia corespunzătoare lui f trecem monotonia, valorile lui f în rădăcinile lui f' şi limitele la capete

E4) Im f este formată din reuniunea tuturor intervalelor lui $f\left(x\right)$ pe care funcţia este strict monotonă

19. Definiţia convexităţii, concavităţii lui f

f convexă pe I $\Leftrightarrow \forall t\in\left[0;1\right], \forall x_1, x_2 \in D_f \Rightarrow$

$f\left(t\cdot x_1+\left(1-t\right)\cdot x_2\right)\leq t\cdot f\left(x_1\right)+\left(1-t\right)\cdot f\left(x_1\right)$

f concavă pe I $\Leftrightarrow \forall t\in\left[0;1\right], \forall x_1, x_2 \in D_f \Rightarrow$

$f\left(t\cdot x_1+\left(1-t\right)\cdot x_2\right)\geq t\cdot f\left(x_1\right)+\left(1-t\right)\cdot f\left(x_1\right)$

20. Stabilirea convexităţii unei funcţii folosind derivata de ordinul II

Dacă f este de 2 ori derivabilă pe I şi

dacă $f''(x)\geq 0, \forall x\in\left[a;b\right]\Rightarrow$ f convexă pe I;

dacă $f''(x)\leq 0, \forall x\in\left[a;b\right]\Rightarrow$ f concavă pe I.

21. Punctele de inflexiune ale unei funcţii:

E1) rezolvăm ecuaţia $f''\left(x\right)=0\Rightarrow x_i$ rădăcini

E2) dacă f'' îşi schimbă semnul în $x=\alpha\Rightarrow x=\alpha$ punct de inflexiune

22. Studierea injectivităţii şi a surjectivităţii folosind analiza matematică

- dacă $f'\left(x\right)\geq 0$ şi $f'\left(x\right)=0$ doar în puncte izolate

$\Rightarrow f$ strict crescătoare $\Rightarrow f$ injectivă

- dacă $f'\left(x\right)\leq$ şi $f'\left(x\right)=0$ doar în puncte izolate

$\Rightarrow f$ strict descrescătoare $\Rightarrow f$ injectivă

Obs.: dacă f continuă f nu e strict monotonă, atunci f nu e injectivă

- dacă $\mathrm{Im}_f = Cd_f \Rightarrow f$ surjectivă

Obs.: dacă $\mathrm{Im}_f \neq Cd_f \Rightarrow f$ nu e surjectivă

23. Calcularea derivatelor de ordinul I sau II pentru funcţia inversă

$\left(f^{-1}\right)'\left(y_0\right)=\dfrac{1}{f'(x_0)}$, x_0 îl găsim din relaţia $f\left(x_0\right)=y_0$.

$\left(f^{-1}\right)''\left(y_0\right)=-\dfrac{f''(x_0)}{\left(f'(x_0)\right)^3}$, iar x_0 îl găsim din $f\left(x_0\right)=y_0$.

24. α **este punct critic pentru** $f \Leftrightarrow f'(\alpha)=0$

25. α **-punct unghiular** dacă f continuă în α şi are derivatele laterale în α diferite, cel puţin una finită.

26. α **-punct de întoarcere pentru** $f \Leftrightarrow f$ continuă în α, f are derivate laterale în α infinite şi diferite

$\left(f'_s(a)=-\infty;\ f'_d(a)=\infty \text{ sau } f'_s(a)=\infty;\ f'_d(a)=-\infty;\right)$

27. Teorema lui FERMAT : $f:(a;b)\to\mathbb{R}, \alpha\in(a;b)$

punct de extrem. Dacă f e derivabilă în $x=\alpha \Rightarrow f'(\alpha)=0.$

Obs: Reciproca e falsă, adică $f'(\alpha)=0 \not\Rightarrow \alpha$ punct de extrem.

28. Teorema lui ROLLE: $f:[a;b]\to\mathbb{R}$. Dacă

1) f continuă pe $[a;b]$

2) f derivabilă pe $(a;b)$

3) $f(a)=f(b)$

atunci $\exists c\in(a;b)$ astfel încât $f'(c)=0.$

29. Teorema lui LAGRANGE: $f:[a;b]\to\mathbb{R}$. Dacă

1) f continuă pe $[a;b]$

2) f derivabilă pe $(a;b)$

atunci $\exists c\in(a;b)$ astfel încât $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$

30. Şirul lui Rolle – ne dă numărul de rădăcini reale ale unei ecuaţii şi intervalele în care sunt situate

E1) Se găseşte D_f unde $f(x)=$ecuaţia dată.

E2) Se rezolvă $f'(x)=0 \Rightarrow x_i$ rădăcini

E3) Se face tabel de tipul :

		x_1	x_2	x_3	
f'		0	0	0	
f					

E4) Linia lui f se completează cu limitele la capetele D_f şi valorile lui f in x_i

E5) Şirul lui Rolle este un şir de semne alese din linia lui f (semnele limitelor la capete şi semnele valorilor lui f în rădăcinile lui $f'(x)$)

E6) Dacă în şirul lui Rolle apar semne consecutive identice atunci între valorile lui x corespunzătoare, f nu are rădăcini reale.

Dacă apar semne consecutive opuse, atunci între valorile lui x corespunzătoare f are o unică rădăcină reală.

Dacă apare 0 atunci x_i este rădăcină multiplă. Pentru a-i găsi ordinul calculăm $f'(x_i)$, $f''(x_i)$...

31. Consecinţe ale teoremelor de medie

C1) Dacă $f'(x)=0$ pe interval $\Rightarrow f$ e constantă pe acel interval.

C2) Dacă $f'(x)=g'(x)$ pe un interval $\Rightarrow f$ diferă de g printr-o constantă pe acel interval.

32. Regulile lui l'Hopital Dacă $f,g:[a;b]\setminus\{\alpha\}\to\mathbb{R}$ astfel încât

1) f,g derivabile pe $[a;b]\setminus\{\alpha\}$

2) $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{f(x)}{g(x)}\in\left\{\dfrac{\infty}{\infty};\dfrac{0}{0}\right\}$

3) $\exists\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}\in\overline{\mathbb{R}}$

atunci $\exists\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

Obs1: Teorema se poate aplica recursiv, adică în cazul în care $\dfrac{f'}{g'}$ este tot în cazul $\dfrac{0}{0}$ sau $\dfrac{\infty}{\infty}$, se mai aplică pentru $\dfrac{f''}{g''}$, etc.

Obs. 2: Nu întodeauna aplicarea teoremei lui l'Hopital dă cele mai simple calcule, se sugerează combinarea metodelor elementare de calcul a limitelor cu regula lui l'Hopital.

Obs. 3: Dacă prin l'Hopital ajungem la rapoarte care nu au limită, nu rezultă că $\dfrac{f}{g}$ nu are limită, ci doar că ea nu se poate calcula cu regula lui l'Hopital.

Exp.: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-\sin x}{x+\sin x}$

33. Calcularea limitelor de şiruri cu ajutorul teoremei lui l'Hopital

E1) Se consideră funcţia ajutătoare $f(n)=x_n$, apoi trecem la variabila *x* unde $f:(a,\infty)\to R$,

E2) Se calculează $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$

E3) Se foloseşte : $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=l\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}x_n=l$

34. Demonstrarea unor inegalităţi folosind derivatele unei funcţii(determinarea semnului unei funcţii) - se cere compararea a două funcţii sau a unei funcţii cu un număr real

E1) se trece totul în partea stângă şi se obţine compararea unei funcţii cu zero

E2) calculăm derivata funcţiei

E3) găsim semnul derivatei

E4) folosind semnul derivatei, găsim monotonia funcţiei

E5) calculăm limita funcţiei în capetele domeniului(sau valoarea funcţiei în capetele domeniului)

E5) facem tabel de variaţie şi determinăm semnul funcţiei

35. Inegalităţi demonstrate cu derivate, dar care se pot folosi ca şi formule în demonstrarea altor relaţii

a) $\sin x \leq x, \forall x \geq 0$

b) $\ln(1+x) \leq x, \forall x \geq 0$

c) $e^x \geq x+1, \forall x \in \mathbb{R}$

36. Discuţia numărului de rădăcini ale ecuaţiei $f(x)=a$

E1) calculăm derivata funcţiei

E2) se face tabel de variaţie al funcţiei f

E3) se schiţează graficul funcţiei, ţinând cont de limitele din capete, de punctele de extrem şi de monotonie

E4) numărul de rădăcini este dat de numărul de puncte de intersecţie dintre dreapta $y=a$ şi graficul funcţiei

Capitolul XXI
REPREZENTAREA GRAFICĂ A FUNCŢIILOR (XI)

1.Domeniul de definiţie.

Se pun condiţii la numitori, logaritmi, radicali şi la domenii consacrate (exp. $\arcsin x$).

2.Intersecţia cu axele, limite la capete, asimptote.

E1) $\cap Oy: x=0\in D_f \Rightarrow f(0)=...\Rightarrow A(0,...)\in G_f$

$\cap Ox: f(x)=0\Rightarrow x_1,x_2,...$soluţii $\Rightarrow B(x_1,0)\in G_f, C(x_2,0)\in G_f$ etc.

E2) Se calculează limitele la toate capetele deschise ale D_f şi valorile lui f în capetele închise.

E3) se determină asimptotele

3. Continuitate, derivabilitate.

E1) Se foloseşte: „ f este compunere, sumă, diferenţă, produs, cât de funcţii elementare pe un interval $\Rightarrow$ f continuă pe acel interval”, se găsesc eventualele discontinuităţi şi tipul lor.

E2) Se derivează f , se găseşte domeniul de derivabilitate ($D_f \cap$ noi condiţii), se găseşte eventual monotonia şi eventualele puncte critice, de extrem, unghiulare sau de întoarcere.

E3) Se calculează, se găseşte $D_{f''}$, se obţine convexitatea sau concavitatea lui f şi ev $f''(x)$entualele puncte de inflexiune.

<u>Obs</u>: Uneori găsirea rădăcinilor lui $f''(x)=0$ este complicată şi această etapă poate lipsi.

4.Tabelul de variaţie.

E1) Are forma:

x	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
f''					
f'					
f					

<u>Obs</u>: Se haşurează porţiunea care nu e în domeniu.

E2) Linia lui f'' respectiv f' se completează cu cifra 0 sau eventualele „bare" şi semnul corespunzător.
E3) Linia lui f se completează cu limite la capete şi valori în toate numerele de pe linia lui x, apoi săgeţi de monotonie şi notaţiile corespunzătoare convexităţii sau concavităţii.
Obs: Sub valorile găsite se trece eventual tipul punctului găsit: (c) critic, (m) minim, (M) maxim, (u) unghiular, (î) întoarcere şi (i) inflexiune.

5.Trasarea graficului.

E_1) Se haşurează porţiunea care nu e din domeniu situată între paralele duse prin valorile lui x corespunzătoare.
E_2) Se trasează asimptotele doar în direcţia respectivă.
E_3) Se reprezintă punctele găsite.
E_4) Se trasează graficul funcţiei ţinând cont de asimptote şi de faptul că trece prin toate punctele găsite
Obs 1: dacă f pară, impară sau periodică, se face un alt grafic complet cu eventuale simetrii sau translaţii ale graficului anterior.
Obs 2: este esenţială situarea punctelor de tipul $(-\infty,-\infty),(-\infty,+\infty)$, $(-0,-\infty),(\infty,0)$ etc.

6.Ecuaţia cercului de centru $M(\alpha,\beta)$ şi rază R este

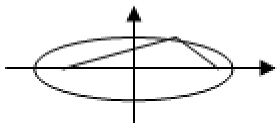
$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2$$

7.Aria şi lungimea cercului de ecuaţie $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2$

Aria cercului este $A=pR^2$
Lungimea cercului este $L=2pR$

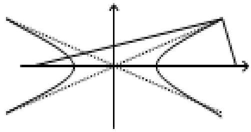
8.Ecuaţia elipsei: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$, unde $a^2-c^2=b^2$.

Obs1.: excentricitatea elipsei: $e=\frac{c}{a}<1$.



9. Ecuaţia hiperbolei - $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0$,

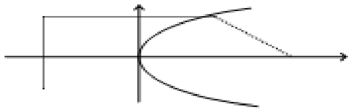
unde $c^2-a^2=b^2$.



Obs1:excentricitatea hiperbolei: $e=\frac{c}{a}>1$.

Obs.2: ec. asimptotelor hiperbolei $y=\pm\frac{b}{a}x$

10.Ecuaţia parabolei: $y^2-2px=0$, unde p este parametrul parabolei.



11.Ecuaţia tangentei la o conică într-un punct de pe conică se găseşte prin dedublarea ecuaţiei conicei în punctul respectiv
Formulele de dedublare sunt:

$$x^2 \xrightarrow{deducblare} xx_1;\quad x \xrightarrow{dedublare} \frac{1}{2}\cdot(x+x_1);\quad a \xrightarrow{dedublare} a.$$

$$y^2 \xrightarrow{dedublare} yy_1;\quad y \xrightarrow{dedublare} \frac{1}{2}\cdot(y+y_1);\quad a \xrightarrow{dedublare} a.$$

Et.1) Se verifică dacă $M(x_0, y_0)$ aparţine conicei respective studiind dacă coordonatele sale verifică ecuaţia conicei respective
Et.2) Se dedublează ecuaţia conicei şi obţinem:

Pentru cercul $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2 \Rightarrow$ ecuaţia tangentei în M$(x_0;y_0)$ este $(x-\alpha)(x-x_0)+(y-\beta)(y-y_0)=R^2$.

Pentru elipsa $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1$.

Pentru hiperbola $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{xx_0}{a^2}-\frac{yy_0}{b^2}=1$.

Pentru parabola $y^2=2px \Rightarrow yy_0=p(x+x_0)$.

12.Normala la o figură este perpendiculară pe tangenta in punctul respectiv

Capitolul XXII
PRIMITIVE (XII)

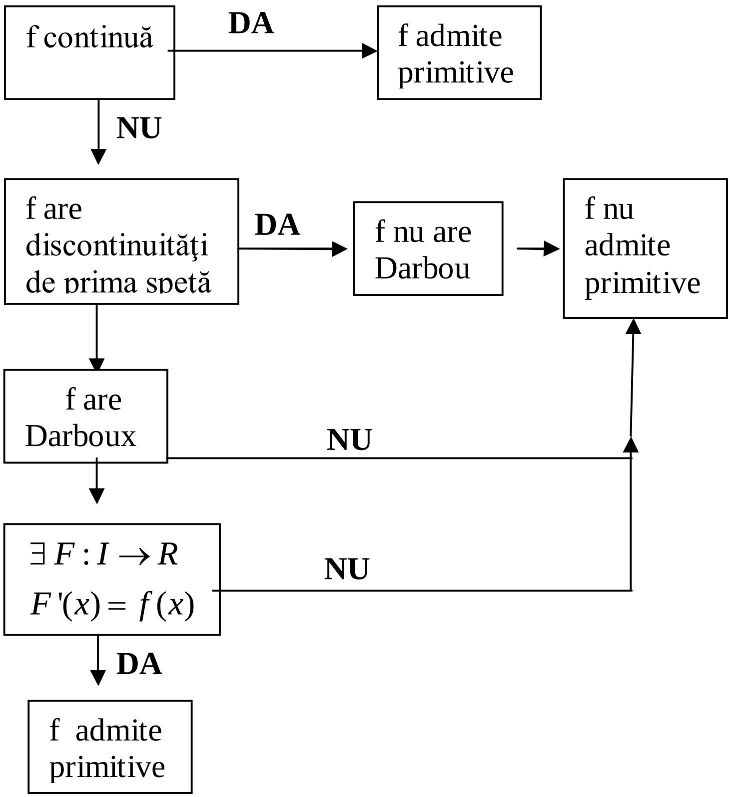
1. *f* admite primitive pe I (notăm $f \in P_I$) $\exists F : I \to \mathbb{R}$ astfel încât:

a) F derivabilă pe I b) $F'(x) = f(x), \forall x \in I$

Obs. 1: O funcţie f are o infinitate de primitive şi orice două primitive diferă printr-o constantă.

Obs. 2: Mulţimea primitivelor se notează $\int f(x)dx$, se numeşte integrala nedefinită a lui f.

2. Cercetarea dacă o funcţie admite primitive



3. Relaţia între funcţie şi primitiva sa:

$$\left(\int f(x)dx = F(x) + \mathrm{C}\right) \text{ și } F'(x) = f(x)$$

Obs.: Dacă se cere să arătăm că $F(x)$ este primitivă pentru $f(x)$, este mai simplu să derivăm $F(x)$ şi să arătăm că e egal cu $f(x)$

4. Primtiva derivatei și derivarea primitivei:

$$\int f'(x)dx = f(x) + \mathrm{C}$$

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$$

4. Tabel de integrale nedefinite

$\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \mathrm{C}, \forall \alpha \neq -1$	$\int \frac{1}{x}dx = \ln\|x\| + \mathrm{C}$
$\int a^{x}dx = \frac{a^{x}}{\ln a} + \mathrm{C}, \forall a \neq 1$	$\int \frac{1}{x^2-a^2}dx = \frac{1}{2a}\ln\left\|\frac{x-a}{x+a}\right\| + \mathrm{C}$
$\int \frac{1}{x^2+a^2}dx = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + \mathrm{C}$	$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = \arcsin\frac{x}{a} + \mathrm{C}$
$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}dx = \ln\left\|x+\sqrt{x^2-a^2}\right\| + \mathrm{C}$	$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}dx = \ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right) + \mathrm{C}$
$\int \frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}dx = \sqrt{x^2-a^2} + \mathrm{C}$	$\int \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = -\sqrt{a^2-x^2} + \mathrm{C}$
$\int \sin x dx = -\cos x + \mathrm{C}$	$\int \cos x dx = \sin x + \mathrm{C}$
$\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \operatorname{tg}x + \mathrm{C}$	$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\operatorname{ctg}x + \mathrm{C}$
$\int tgx dx = -\ln\|\cos x\| + \mathrm{C}$	$\int ctgx dx = \ln\|\sin x\| + \mathrm{C}$
$\int f^{n} \cdot f' dx = \frac{f^{n+1}}{n+1} + \mathrm{C}$	$\int \frac{f'}{f}dx = \ln\|f\| + \mathrm{C}$

Obs. 1: Formulele se pot folosi sau direct sau **doar dacă î**n loc de x avem $ax+b$, şi atunci $\int f(ax+b)dx = \frac{\text{formula}}{a} + \mathrm{C}$

Exp.: $\int e^{2x}dx = \frac{e^{2x}}{2} + \mathrm{C}$, $\int e^{-x}dx = \frac{e^{-x}}{-1} + \mathrm{C} = -e^{-x} + \mathrm{C}$

Obs.2: $\int (1 + tg^2 x)dx = \int \frac{1}{\cos^2 x}dx = tgx + \mathrm{C}$,

5. Monotonia primitivelor - nu este nevoie să calculăm primitiva funcţiei, folosim $F'(x) = f(x)$, şi găsim semnnul lui $f(x)$

5. Convexitatea primitivelor - nu este nevoie să calculăm primitiva funcţiei, folosim $F'(x) = f(x)$, , apoi că $F''(x) = f'(x)$ şi găsim semnnul lui $f'(x)$

6. Proprietătea de liniaritate a integralei nedefinite

$$\int (a \cdot f(x) + b \cdot g(x))dx = a\int f(x)dx + b\int g(x)dx$$

7. Integrarea prin părţi

Se foloseşte formula $\int f \cdot g' = f \cdot g - \int f' \cdot g$

E1) Se scrie $\begin{array}{l} f(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \Rightarrow f'(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots \\ g'(x) = \ldots\ldots \Rightarrow g(x) = \int g'(x)dx = \ldots \end{array}$

E2) Dacă $\int f' \cdot g$ nu este formulă directă, se repeta procedeul

Obs 1: La $g(x) = \int g'(x)dx$ nu se mai pune constanta

Obs 2: De obicei $g'(x)$ se alege o funcţie la care să-i putem găsi primitiva, iar $f(x)$ o funcţie care prin derivare devine mai simplă.

Obs 3: Formulele de integrare se pot aplica doar dacă avem funcţii care au ca şi argument *x*, altfel suntem obligaţi să verificăm prin derivare dacă alegerea lui *g* este corectă sau să notăm argumentul funcţiei cu *t*

8. Calculul integralelor de tipul:

$\int \sqrt{x^2 - a^2}dx$, $\int \sqrt{x^2 + a^2}dx$ sau $\int \sqrt{a^2 - x^2}dx$

E1) Se aplică conjugatul $\Rightarrow \int \sqrt{x^2 - a^2}dx = \underbrace{\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - a^2}}dx}_{I_1} - a^2 \underbrace{\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}}_{I_2}$

E2) Pentru $I_1 = \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-a^2}}dx$, fie

$$f(x)=x \quad \Rightarrow \quad f'(x)=1$$

$$g'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}} \Rightarrow g(x)=\sqrt{x^2-a^2}$$

$$I_1 = x\sqrt{x^2-a^2} - \int \sqrt{x^2-a^2}dx \Rightarrow I_1 = x\sqrt{x^2-a^2} - I$$

E3) $I = x\sqrt{x^2-a^2} - I - a^2 \cdot \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| \Rightarrow$

$$I = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2-a^2} - a^2\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|\right) + C$$

Obs 1: Exactitatea alegerii lui *g* se verifică prin derivare,

de exemplu $g'(x)=\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} \Rightarrow g(x)=-\sqrt{a^2-x^2}$

9. Integrale recurente

E1) notăm integrala iniţială cu I_n

E2) calculăm prin metoda integrării prin părţi

E3) separăm $\Rightarrow I_n = ...$

E4) dacă obţinem o recurenţă de ordinul întâi, calculăm primul termen, dacă e recurenţă de ordinul doi, calculăm primii 2 termeni...

10. Prima metodă de schimbare de variabilă:

E1) notăm o funcţie care depinde de x cu *t*, derivez

$$\Rightarrow (....)'dx = dt \Rightarrow dx = \frac{dt}{(....)'}$$

E2) înlocuim în integrală $\Rightarrow$integrală ce depinde doar de *t* şi la care se pot aplica direct formule sau alte metode de calcul a integralelor

Obs 1: dacă integrala nu depinde doar de t, atunci notaţia nu este bună

Obs 2: dacă apare ca şi argument al funcţiilor $ax+b$, notez

$ax+b=t \Rightarrow adx=dt \Rightarrow dx=\frac{dt}{a}$, iar dacă argumentul funcţiilor este $x+b$, atunci se pot aplica direct formulele

Obs 3: de obicei numărătorul conţine derivata a ceea ce notez.

11. A doua metodă de schimbare de variabilă:

E1) notăm o funcţie care depinde de *x* cu *t*, gţsim *x* în funcţie de *t*, derivăm $\Rightarrow dx=(....)'dt$

E2) înlocuim în integrală şi obţinem o integrală ce depinde doar de *t* şi la care se pot aplica direct formulele sau alte metode

Obs: Uneori schimbarea de variabila duce la integrale raţionale care au metode standard de calcul

12. Calculul primitivelor pentru funcţii cu acoladă

- se calculează primitiva pe fiecare ramură, însă apar constante diferite, notate cu C_1 şi C_2, apoi punem condiţia ca $F(x)$ să fie continuă şi găsim o constantă în funcţie de cealaltă, la sfârşit apare o primitivă ce depinde doar de C

13. Funcţii raţionale: $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$, unde $P(x)$ şi $Q(x)$ polinoame

Funcţii raţionale simple :

a) $f(x)=P(x)$ b) $f(x)=\frac{A}{(x+a)^n}$ c) $f(x)=\frac{Ax+B}{(x^2+ax+b)^n}, \Delta<0$

14. Metoda coeficienţilor nedeterminaţi: înseamnă descompunerea funcţiei raţionale $\frac{P(x)}{Q(x)}$ în funcţii raţionale simple

E1) dacă $grad\ P(X) \geq grad\ Q(X)$, se împarte $P(X)$ la $Q(X)$ $\Rightarrow P(X):Q(X)=C(X)$ rest $R(X) \Leftrightarrow P(X)=Q(X)\cdot C(X)+R(X)$, unde $grad\ R(X)<grad\ Q(X)$

E2) $\frac{P(X)}{Q(X)}=C(X)+\frac{R(X)}{Q(X)}$

E3) descompunem $Q(X)$ în produs de factori de grad I sau gr II

E5) se aduc fracţiile din partea dreapta la acelaşi numitor, se egalează coeficienţii numărătorilor $\Rightarrow$ sistem

Obs.: Calculul oricăror primitive ale funcţiilor raţionale se reduce la calculul primitivelor funcţiilor rationale simple

15. Tipuri de integrale pentru functii raţionale simple

Dacă avem coeficienţi dominanţi diferiţi de 1, se scot în faţa integralei aceşti coeficienţi dominanţi, deci vom discuta doar pentru coeficienţi dominanţi egali cu 1

1) $\int \frac{1}{x+a}dx = \ln|x+a| + C$

2) $\int \frac{1}{(x+a)^n}dx = \int (x+a)^{-n}dx = \frac{(x+a)^{-n+1}}{-n+1} + C = \frac{1}{-n+1}\cdot\frac{1}{(x+a)^{n-1}} + C$

3) $\int \frac{1}{x^2+a}dx = \int \frac{1}{x^2+\left(\sqrt{a^2}\right)}dx = \frac{1}{\sqrt{a}}\, arctg\, \frac{x}{\sqrt{a}} + C$

sau $\int \frac{1}{x^2-a}dx = \int \frac{1}{x^2-\left(\sqrt{a}\right)^2}dx = \frac{1}{2a}\ln\frac{x-\sqrt{a}}{x+\sqrt{a}} + C$

4) $\int \frac{1}{ax^2+bx+c}dx$ se foloseşte forma canonică

$ax^2+bx+c = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$ sau formarea unui pătrat perfect

$\Rightarrow I = \int \frac{dx}{a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}} = \frac{1}{a}\int \frac{1}{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}}dx$

notăm $x+\frac{b}{2a} = t \Rightarrow dx = dt \Rightarrow I = \frac{1}{a}\int \frac{1}{t^2 - \frac{\Delta}{4a^2}}dt =$ tip 3

5) $\int \frac{x}{ax^2+bx+c}dx = \frac{1}{2a}\int \frac{2ax}{ax^2+bx+c}dx = \frac{1}{2a}\int \frac{2ax+b-b}{ax^2+bx+c}dx =$

$$\frac{1}{2a}\int\frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}dx-\frac{b}{2a}\int\frac{1}{ax^2+bx+c}=$$

$=\frac{1}{2a}\ln\left|ax^2+bx+c\right|-\frac{b}{2a}\cdot I_1$, unde I_1= integrala tip 4

Obs.1: $\int\frac{Ax+B}{\left(ax^2+bx+c\right)^n}dx=A\int\frac{x}{\left(ax^2+bx+c\right)^n}dx+B\int\frac{1}{\left(ax^2+bx+c\right)^n}dx$

Obs: Forma canonică se poate folosi şi atunci când avem funcţii raţionale ce conţin $\sqrt{ax^2+bx+c}$ (chiar şi dacă $\Delta\geq 0$)

Exp: $\int\sqrt{ax^2+bx+c}\;dx=\int\sqrt{a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a}}\cdot dx$

Notam $x+\frac{b}{2a}=t\Rightarrow\int\sqrt{at^2-\frac{\Delta}{4a}}\cdot dt$

15. Integrale trigonometrice

a) Dacă în funcţie apar doar funcţiile $\sin x,\cos x$ se încearcă notaţia $t=\cos x$, $t=\sin x$ sau $t=tg\ x$ şi pentru această ultimă notaţie folosim formulele $\sin^2 x=\frac{tg^2x}{1+tg^2x}$ şi $\cos^2 x=\frac{1}{1+tg^2x}$

b) dacă *sin x* şi *cos x* sunt la puterea cel mult 1, folosim:

$\sin x=\frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}$, $\cos x=\frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}$ şi şi notăm $tg\frac{x}{2}=t\Rightarrow$ funcţie raţională fiind dată de intervalul in care este *x*

16. Notaţii clasice

a) $\int R\left(a^x\right)dx\Rightarrow a^x=t$ b) $\int R\left(x;\sqrt[a]{x};\sqrt[b]{x};...\right)\Rightarrow\sqrt[a\cdot b...]{x}=t$

c) $\int R\left(x;\sqrt[n]{\frac{a\cdot x+b}{c\cdot x+d}}\right)dx\Rightarrow t=\sqrt[n]{\frac{a\cdot x+b}{c\cdot x+d}}$

Capitolul XXIII
INTEGRALE DEFINITE

1. Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}_+$, **numim subgraficul funcţiei** f mulţimea $\Gamma_f=\{(x,y)|a\le x\le b, 0\le y\le f(x)\}$**,** adică suprafaţa cuprinsă între graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele $x=a$ şi $x=b$.

2.Diviziune a unui interval: fie intervalul $[a,b]\Rightarrow$ mulţimea de puncte $\Delta=(a=x_0<x_1<...<x_n=b)$ se numeşte **diviziune a intervalului** $[a,b]$

Obs.: **norma unei diviziuni** este $\|\Delta\|=\max\limits_{k=\overline{1,n}}(x_k-x_{k-1})$

Obs.2: **diviziune echidistantă** este o diviziune împărţită în intervale de lungimi egale

Obs.3: având diviziunea Δ, ξ_k **este sistem de puncte intermediare** $\Leftrightarrow x_{k-1}\le\xi_k\le x_k$

3.Suma Riemann asociata funcţiei *f*, diviziunii Δ si sistemului de puncte intermediare ξ_k este $S_R=\sum\limits_{k=1}^{n}f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})$

Obs.: Suma Riemann se notează corect $\sigma_\Delta(f,\xi_k)=\sum\limits_{k=1}^{n}f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})$

Obs.: Suma Riemann este de fapt suma ariilor unor dreptunghiuri luate cu semnele corespunzătoare.

4.Definiţia integrabilitaţii Riemann $f:[a;b]\to\mathbb{R}$ e integrabilă in sens Riemann pe $[a,b]\Leftrightarrow\forall\Delta$ cu $\|\Delta\|\to 0,\forall\xi_k$ sistem de puncte intermediare $\Rightarrow\ \exists\lim\limits_{\|\Delta\|\to 0}S_R\in\mathbb{R}$. Notăm $\int_a^b f(x)\,dx=\lim\limits_{\|\Delta\|\to 0}S_R$

Obs: $\int_a^b f(x)\,dx$ e o sumă infinită de segmente $f(x)$, unde $x\in[a;b]$

5.Criterii de studiere a integrabilităţii

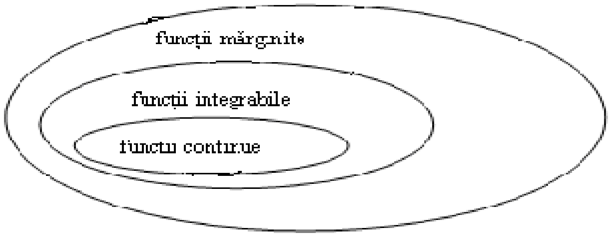
a) f continuă $\Rightarrow f$ integrabilă

f integrabilă $\not\Leftarrow f$ continuă

b) f nemărginită $\Rightarrow f$ nu e integrabilă

f mărginită $\not\Rightarrow f$ integrabilă

Obs.: este bine de reţinut următoarea diagramă:



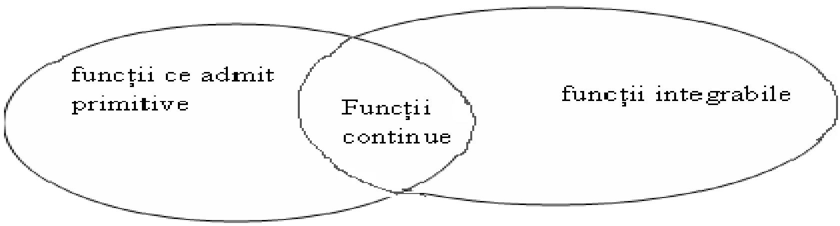
c) f monotonă $\Rightarrow f$ integrabilă, reciproc NU

d) f integrabilă, $g \neq f$ doar într-un număr finit de puncte

$\Rightarrow g$ integrabilă şi $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx$

e) dacă $f(x)$ e mărginită şi discontinuă într-un număr finit de puncte $\Rightarrow f(x)$ este integrabilă

6. Legătura între funcţii care admit primitive şi funcţii integrabile



7.Teorema lui Leibniz-Newton $f:[a;b]\to\mathbb{R}, f$ integrabilă care admite primitive pe $[a;b]\Rightarrow \int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$ unde F este o primitivă a funcţiei f

Obs.: Teorema mai este cunoscută şi sub forma:

„Dacă $f:[a;b]\to\mathbb{R}, f$ continuă pe $[a;b]\Rightarrow \int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$ unde F este o primitivă a funcţiei f ."

Dacă integralele sunt complicate, se consideră $F(x)=\int f(x)dx$ o primitivă a funcţiei f, se calculează separat $F(x)$ apoi

$\Rightarrow \int_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a)$

8. Integrala din derivata funcţiei:

$$\int_a^b f'(x)dx=f(x)\Big|_a^b=f(b)-f(a)$$

9. Proprietatea de liniaritate a integralei definite

$$\int_a^b (a\cdot f(x)+b\cdot g(x))dx=a\int_a^b f(x)dx+b\int_a^b g(x)dx$$

Obs.: $\int_a^b (a\cdot f(x)-b\cdot g(x))dx=a\int_a^b f(x)dx-b\int_a^b g(x)dx$

10. Formula integrării prin părţi

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx=f(x)g(x)\Big|_a^b-\int_a^b f'(x)g(x)dx$$

11. Schimbarea de variabilă

E1) notăm $t=\ldots\Rightarrow dt=(\ldots..)'dx$

E2) $x=a\Rightarrow t(a)=\ldots.$ $\quad x=b\Rightarrow t(b)=\ldots$

E3) $\int_a^b f(x)dx=\int_{t(a)}^{t(b)}\ldots..dt$

12. Integrala funcţiei inverse $\int_a^b f^{-1}(x)\,dx=$

E1) notăm $f^{-1}(x)=t \Rightarrow x=f(t) \Rightarrow dx=f'(t)dt$

E2) $\begin{cases} x=a \Rightarrow f(t)=a \Rightarrow t_1=... \\ x=b \Rightarrow f(t)=b \Rightarrow t_2=... \end{cases}$

E3) $I=\int_{t_1}^{t_2} t\cdot f'(t)\,dt$

13. Determinarea relaţiei de recurenţă pt. $I_n=\int_{x_1}^{x_2}\left(ax^2+bx+c\right)^n dx$

x_1, x_2 sunt rădăcinile ecuaţiei $ax^2+bx+c=0$

E1) integrăm prin părţi,

$$f=\left(ax^2+bx+c\right)^n \Rightarrow f'=n\left(ax^2+bx+c\right)^{n-1}(2ax+b)$$

$$g'=1 \qquad\qquad \Rightarrow g=x$$

E2) $I_n=\left(ax^2+bx+c\right)^n x\Big|_{x_1}^{x_2}-n\int_{x_1}^{x_2}\left(ax^2+bx+c\right)^{n-1}\left(2ax^2+bx\right)dx$

E3) $I_n=0-0-2n\int_{x_1}^{x_2}\left(ax^2+bx+c\right)^{n-1}\left(ax^2+\frac{bx}{2}\right)dx$

E4) $I_n=-2n\int_{x_1}^{x_2}\left(ax^2+bx+c\right)^{n-1}\left(ax^2+bx+c-\frac{bx}{2}-c\right)dx$

E5) $I_n=-2n\left(\int_{x_1}^{x_2}\left(ax^2+bx+c\right)^n dx-\int_{x_1}^{x_2}\left(ax^2+bx+c\right)^{n-1}\left(\frac{bx}{2}+c\right)dx\right)$

E6) $I_n=-2n\left(I_n-\int_{x_1}^{x_2}\left(ax^2+bx+c\right)^{n-1}\left(\frac{bx}{2}+c\right)dx\right)$

E7) $I_n=-2nI_n+\frac{2n}{2}\left(\int_{x_1}^{x_2}\left(ax^2+bx+c\right)^{n-1}(bx+2c)\,dx\right)$

E8) $(2n+1)I_n=nb\left(\int_{x_1}^{x_2}\left(ax^2+bx+c\right)^{n-1}\left(x+\frac{2c}{b}\right)dx\right)$

E9) $(2n+1)I_n = \frac{nb}{2a}\left(\int_{x_1}^{x_2}\left(ax^2+bx+c\right)^{n-1}\left(2ax+b-b+\frac{4ac}{b}\right)dx\right)$

E10) $(2n+1)I_n = \frac{nb}{2a}\int_{x_1}^{x_2}\left(ax^2+bx+c\right)^{n-1}(2ax+b)dx +$

$$+\frac{nb}{2a}\left(\int_{x_1}^{x_2}\left(ax^2+bx+c\right)^{n-1}\left(\frac{-b^2+4ac}{b}\right)dx\right)$$

E11) $(2n+1)I_n = \frac{nb}{2a}\frac{\left(ax^2+bx+c\right)^n}{n}\Bigg|_{x_1}^{x_2} + \frac{nb}{2a}\cdot\frac{-b^2+4ac}{b}I_{n-1}$

E12) $(2n+1)I_n = 0-0-\frac{n\Delta}{2a}I_{n-1}$

E13) $(2n+1)I_n = -\frac{n\Delta}{2a}I_{n-1}$

14. Calcularea limitelor unor sume cu ajutorul integralelor

E1) se scrie suma S_n ca sumă de termen general

E2) se dă factor comun pe $\frac{1}{n}$, se scoate în faţa sumei

E3) se scrie noul termenul general al sumei în funcţie de $\frac{k}{n}$

E4) se alege $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ unde $f(x)$ este funcţia obţinută înlocuind $\frac{k}{n}$ cu x în termenul general al sumei

E5) se alege $\Delta=\left(0<\frac{1}{n}<...<\frac{n}{n}\right)$ o diviziune a intervalului $[0,1]$ cu $\|\Delta\|=\frac{1}{n}\to 0$ şi $\xi_k=\frac{k}{n}$ sistem de puncte intermediare rezultă

E3) $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\int_0^1 f(x)dx$

15. Calcularea unor limite folosind direct sume Riemann

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+....f\left(\frac{n}{n}\right)\right)=\int_0^1 f(x)\,dx$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(f'\left(\frac{1}{n}\right)+f'\left(\frac{2}{n}\right)+....f'\left(\frac{n}{n}\right)\right)=\int_0^1 f'(x)\,dx=f(x)\Big|_0^1=f(1)-f(0)$$

16. Proprietăţi ale funcţiilor integrabile (pentru $a<b$)

a) $\int_a^b(\alpha\cdot f+\beta\cdot g)\,dx=\alpha\int_a^b f(x)\,dx+\beta\int_a^b g(x)\,dx$

b) $f(x)\le g(x)\Rightarrow\int_a^b f(x)\,dx\le\int_a^b g(x)\,dx$

Obs.: Dacă $f(x)\le g(x)$ şi există un interval $I\subset[a,b]$ pe care $f(x)<g(x)$, atunci $\int_a^b f(x)\,dx<\int_a^b g(x)\,dx$

c) $f(x)\ge 0\Rightarrow\int_a^b f(x)\,dx\ge 0$ reciproc NU

$f(x)\le 0\Rightarrow\int_a^b f(x)\,dx\le 0$ reciproc NU

Obs.: Dacă $f(x)\ge 0$ şi există un interval $I\subset[a,b]$ pe care $f(x)>0$, atunci $\int_a^b f(x)\,dx>0$

Obs.2: Dacă $f(x)\le 0$ şi există un interval $I\subset[a,b]$ pe care $f(x)<0$, atunci $\int_a^b f(x)\,dx<0$

d) $m\le f(x)\le M\Rightarrow m(b-a)\le\int_a^b f(x)\,dx\le M(b-a)$

e) $f:[a;b]\to\mathbb{R}$, f continuă $\Rightarrow\left|\int_a^b f(x)\,dx\right|\le\int_a^b|f(x)|\,dx$

f) $[c;d]\subset[a;b]$, f pozitivă $\Rightarrow\int_c^d f(x)\,dx\le\int_a^b f(x)\,dx$

g) $\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx$ cu c nu neapărat între a,b

h) $\int_a^a f(x)\,dx=0$ şi $\int_a^b f(x)\,dx=-\int_b^a f(x)\,dx$

Obs.3: Atunci când se cere situarea unei integrale într-un interval, situăm iniţial funcţia, apoi integrăm relaţia

17. Proprietăţi ale integralelor funcţiilor pare sau impare

$$f \text{ pară} \Rightarrow \int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

$$f \text{ impară} \Rightarrow \int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$$

18. Teorema de medie Fie $f:[a;b]\to\mathbb{R}$, f continuă $\Rightarrow \exists c\in(a;b)$ astfel încât $\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$

Obs: Se foloseşte la calculul limitelor de integrale doar dacă după aplicarea teoremei nu obţinem cazuri exceptate

Obs.2: Valoarea medie a integralei este $m=\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$ eee

19. Calcularea limitelor de integrale:

Metoda I: se situează funcţia din interiorul integralei între două capete, se integrează inegalitatea obţinută şi se foloseşte criteriul cleştelui

Metoda II: se foloseşte teorema de medie $\int_a^b f_n(x)\,dx = f(c_n)(b-a)$ ţinând cont că obţinem un şir c_n şi doar dacă în calculul limitei nu obţinem caz exceptat, de obicei ne încurcă cazul 1^{∞}

20. Teorema de existenţă a primitivelor unei funcţii continue

Fie $f:[a;b]\to\mathbb{R}$, f continuă $\Rightarrow F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ este o primitivă a lui $f(x)$

21. Derivarea integralelor definite

- dacă $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt \Rightarrow F'(x)=f(x)$
- dacă $F(x)=\int_{v(x)}^{u(x)} f(t)dt \Rightarrow F'(x)=\big(G(u(x))-G(v(x))\big)'=$

$=G'(u(x))\cdot u'(x)-G'(v(x))\cdot v'(x)=f(u(x))\cdot u'(x)-f(v(x))\cdot v'(x)$, unde G este o primitivă a lui f

Obs.: se poate reţine şi direct, şi aplica ca şi formulă că

$$\left(\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,dt\right)' = f\left(u(x)\right)\cdot u'(x) - f\left(v(x)\right)\cdot v'(x)$$

Obs. 2: Teorema este utilă în calcularea intervalelor de monotonie şi a punctelor de extrem ale unei integrale definite

22. Aria dintre G_f, axa Ox şi dreptele $x=a$ şi $x=b$ este

$$A=\int_a^b \left|f(x)\right| dx$$

Obs 1: dacă nu ştim sigur semnul modului, se face tabel de semne şi se desparte in sumă de integrale

Obs 2: dacă f pară sau impară $\Rightarrow \left|f(x)\right|$ e pară $\Rightarrow$

$$A=\int_{-a}^a \left|f(x)\right| dx = 2\int_0^a \left|f(x)\right| dx$$

23. Aria dintre graficele a 2 funcţii şi dreptele $x=a$ respectiv $x=b$ este

$$A=\int_a^b \left|f(x)-g(x)\right| dx$$

Obs.: Explicitare modului presupune eventuala determinare a punctelor de intersectie dintre $f(x)$ şi $g(x)$ şi a semnului din tabel

Obs. 2: Întotdeauna pentru a determina o funcţie dintr-o relaţie cu x şi y, găsim y în funcţie de x şi considerăm funcţia $y=f(x)$

Obs. 3: De multe ori, din grafic ne dăm seama de unele simetrii şi se poate calcula mai uşor aria.

24. Volumul corpului obţinut prin rotirea în jurul lui Ox a graficului funcţiei f este:

$$V\left(C_f\right)=\pi\int_a^b f^2(x)\,dx$$

Formule adăugate de voi