Examenul național de bacalaureat 2022
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Varianta 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Arătați că $5(1+2i)-2i(5-i)=3$, unde $i^2=-1$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-2x-3$. Determinați numărul real a pentru care $f(a)=1+a^2$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3\left(2x^2+1\right)=2$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifrele impare și distincte.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,0)$, $B(1,6)$ și $C(4,2)$. Determinați coordonatele punctului D, știind că $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$.

5p **6.** Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, astfel încât $BC=10$ și $\sin B=2\sin C$. Arătați că lungimea laturii AB este egală cu $2\sqrt{5}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, $O_3=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ și $A(x)=\begin{pmatrix}x+1&-x&0\\x&1-x&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(1))=1$.

5p **b)** Arătați că $(A(x)-I_3)(A(x)-I_3)=O_3$, pentru orice număr real x.

5p **c)** Determinați numerele reale x pentru care $A(x)\cdot A(x)=xA(x)-(x-1)I_3$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=(x+y)^2-2(x-y)-3$.

5p **a)** Arătați că $0*2=5$.

5p **b)** Determinați numerele reale x pentru care $x*(x+1)=8$.

5p **c)** Determinați perechile (m,n) de numere naturale pentru care $m*n=2mn$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\left(x^2-5x+10\right)\sqrt{x}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{5\left(x^2-3x+2\right)}{2\sqrt{x}}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Determinați intervalele de monotonie a funcției f.

5p **c)** Arătați că $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{f(x)}{x^2\sqrt{x}}\right)^{\frac{x}{5}}=\dfrac{1}{e}$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+e^x+\dfrac{1}{e^x+1}$.

5p **a)** Arătați că $\int\limits_0^2\left(f(x)-\dfrac{1}{e^x+1}\right)dx=e^2+1$.

5p **b)** Arătați că $\int\limits_{-1}^{1}e^x\left(f(x)-x-e^x\right)dx=1$.

5p **c)** Determinați numărul real m pentru care $\int\limits_0^1 x\left(f(x)+f(-x)\right)dx=\dfrac{m}{2}-\dfrac{2}{e}$.

Examenul național de bacalaureat 2022
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$5(1+2i)-2i(5-i)=5+10i-10i+2i^2=$	**3p**
	$=5+2\cdot(-1)=3$	**2p**
2.	$f(a)=a^2-2a-3$, deci $a^2-2a-3=1+a^2$	**3p**
	$-2a=4$, de unde obținem $a=-2$	**2p**
3.	$2x^2+1=3^2 \Rightarrow x^2-4=0$	**3p**
	$x=-2$ sau $x=2$, care convin	**2p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile	**2p**
	În mulțimea numerelor naturale de două cifre sunt 20 de numere care au cifrele impare și distincte, deci sunt 20 de cazuri favorabile, de unde obținem $p=\frac{20}{90}=\frac{2}{9}$	**3p**
5.	$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC} \Rightarrow ABCD$ este paralelogram, deci segmentele AC și BD au același mijloc	**2p**
	Mijlocul segmentului AC are coordonatele $(3,1)$, de unde obținem $D(5,-4)$	**3p**
6.	$\sin B=\frac{AC}{BC}$, $\sin C=\frac{AB}{BC}$, deci $AC=2AB$	**2p**
	Cum $AB^2+AC^2=100$, obținem $AB=2\sqrt{5}$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(1)=\begin{pmatrix}2&-1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(1))=\begin{vmatrix}2&-1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=0+0+0-0-0-(-1)=1$	**3p**
b)	$A(x)-I_3=\begin{pmatrix}x&-x&0\\x&-x&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, pentru orice număr real x	**2p**
	$(A(x)-I_3)(A(x)-I_3)=\begin{pmatrix}x^2-x^2&-x^2+x^2&0\\x^2-x^2&-x^2+x^2&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=O_3$, pentru orice număr real x	**3p**
c)	$A(x)\cdot A(x)=2A(x)-I_3$, pentru orice număr real x	**2p**
	$2A(x)-I_3=xA(x)-(x-1)I_3 \Leftrightarrow (x-2)(A(x)-I_3)=O_3$, de unde obținem $x=0$ sau $x=2$	**3p**

2.a)	$0*2=(0+2)^2-2(0-2)-3=$	**3p**
	$=4+4-3=5$	**2p**
b)	$x*(x+1)=4x^2+4x$, pentru orice număr real x	**2p**
	$4x^2+4x=8 \Leftrightarrow x^2+x-2=0$, de unde obținem $x=-2$ sau $x=1$	**3p**
c)	$(m+n)^2-2(m-n)-3=2mn \Leftrightarrow m^2+n^2-2m+2n-3=0$	**2p**
	$(m-1)^2+(n+1)^2=5$ și, cum m și n sunt numere naturale, obținem perechile $(0,1)$, $(2,1)$ și $(3,0)$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=(2x-5)\sqrt{x}+\left(x^2-5x+10\right)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=$	**3p**
	$=\frac{5x^2-15x+10}{2\sqrt{x}}=\frac{5\left(x^2-3x+2\right)}{2\sqrt{x}}$, $x\in(0,+\infty)$	**2p**
b)	$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=1$ sau $x=2$	**2p**
	$f'(x)\geq 0$, pentru orice $x\in(0,1]$, deci f este crescătoare pe $(0,1]$, $f'(x)\leq 0$, pentru orice $x\in[1,2]$, deci f este descrescătoare pe $[1,2]$ și $f'(x)\geq 0$, pentru orice $x\in[2,+\infty)$, deci f este crescătoare pe $[2,+\infty)$	**3p**
c)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x^2\sqrt{x}}\right)^{\frac{x}{5}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-5x+10}{x^2}\right)^{\frac{x}{5}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\left(1+\frac{-5x+10}{x^2}\right)^{\frac{x^2}{-5x+10}}\right)^{\frac{-5x+10}{x^2}\cdot\frac{x}{5}}=$	**3p**
	$=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-5x+10}{5x}}=e^{-1}=\frac{1}{e}$	**2p**
2.a)	$\int_0^2\left(f(x)-\frac{1}{e^x+1}\right)dx=\int_0^2\left(x+e^x\right)dx=\left(\frac{x^2}{2}+e^x\right)\Big\vert_0^2=$	**3p**
	$=2+e^2-1=e^2+1$	**2p**
b)	$\int_{-1}^1 e^x\left(f(x)-x-e^x\right)dx=\int_{-1}^1\frac{e^x}{e^x+1}dx=\int_{-1}^1\frac{\left(e^x+1\right)'}{e^x+1}dx=\ln\left(e^x+1\right)\Big\vert_{-1}^1=$	**3p**
	$=\ln(e+1)-\ln\frac{1+e}{e}=\ln e=1$	**2p**
c)	$\int_0^1 x\left(f(x)+f(-x)\right)dx=\int_0^1 x\left(e^x+e^{-x}+1\right)dx=\int_0^1 x\left(e^x-e^{-x}+x\right)'dx=x\left(e^x-e^{-x}+x\right)\Big\vert_0^1-$ $-\int_0^1\left(e^x-e^{-x}+x\right)dx=e-\frac{1}{e}+1-\left(e^x+e^{-x}+\frac{x^2}{2}\right)\Big\vert_0^1=\frac{5}{2}-\frac{2}{e}$	**3p**
	$\frac{5}{2}-\frac{2}{e}=\frac{m}{2}-\frac{2}{e}$, de unde obținem $m=5$	**2p**