

Examenul național de bacalaureat 2022
Proba E. c)

Matematică $M_{\text{șt-nat}}$

Varianta 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Arătați că $\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)(2+\sqrt{2})=2$.
- 5p** 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^2 - 4x$. Determinați abscisele punctelor de intersecție a graficului funcției f cu axa Ox .
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2^{x-3} = \frac{1}{2^{2x}}$.
- 5p** 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie multiplu de 11.
- 5p** 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,0)$, $B(0,3)$ și $C(4,0)$. Arătați că triunghiul ABC este isoscel.
- 5p** 6. Se consideră $E(x) = \operatorname{tg} x + \sin \frac{3x}{2} - 2 \cos \frac{x}{2}$, unde $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Arătați că $E\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricele $M(x) = \begin{pmatrix} x+1 & -x \\ -2x & 2x+1 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
- 5p** a) Arătați că $\det(M(1)) = 4$.
- 5p** b) Arătați că $M(x) \cdot M(1) = M(4x+1)$, pentru orice număr real x .
- 5p** c) Determinați numărul real x pentru care $M(x) \cdot M(1) \cdot M(1) = M(x+2)$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \circ y = 5xy + 10x + 10y + 18$.
- 5p** a) Arătați că $(-1) \circ 0 = 8$.
- 5p** b) Demonstrați că $x \circ y = 5(x+2)(y+2) - 2$, pentru orice numere reale x și y .
- 5p** c) Determinați numărul întreg m pentru care $m \circ m = m$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2+1}{x-1} + \ln(x-1)$.
- 5p** a) Arătați că $f'(x) = \frac{x^2-x-2}{(x-1)^2}$, $x \in (1, +\infty)$.
- 5p** b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=2$, situat pe graficul funcției f .
- 5p** c) Demonstrați că $\frac{x^2+1}{x-1} + \ln(x-1) \geq 5$, pentru orice $x \in (1, +\infty)$.
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x+4}{6x^2+1}$.
- 5p** a) Arătați că $\int_0^2 f(x)(6x^2+1) dx = 10$.

5p b) Arătați că $\int_0^2 \left(f(x) - \frac{4}{6x^2 + 1} \right) dx = \frac{\ln 5}{6}$.

5p c) Determinați numărul real m pentru care $\int_0^1 \frac{x+4}{f(x)} \cdot e^{2x} dx = m(e^2 - 1)$.

Examenul național de bacalaureat 2022
Proba E. c)
Matematică *M_șt-nat*

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianta 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)(2+\sqrt{2}) = (2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2}) =$ $= 4 - 2 = 2$	3p 2p
2.	$f(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 4x = 0$ $x = 0$ sau $x = 2$	3p 2p
3.	$2^{x-3} = 2^{-2x} \Leftrightarrow x - 3 = -2x$ $x = 1$	3p 2p
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile În mulțimea numerelor naturale de două cifre sunt 9 numere care sunt multipli de 11, deci sunt 9 cazuri favorabile, de unde obținem $p = \frac{9}{90} = \frac{1}{10}$	2p 3p
5.	$AC = 5$ $BC = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$, deci $AC = BC$, de unde obținem că triunghiul ABC este isoscel	2p 3p
6.	$\operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$, $\sin \frac{\pi}{2} = 1$, $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $E\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3} + 1 - 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 1$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$M(1) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(M(1)) = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 - (-1) \cdot (-2) =$ $= 6 - 2 = 4$	3p 2p
b)	$M(x) \cdot M(1) = \begin{pmatrix} 4x+2 & -4x-1 \\ -8x-2 & 8x+3 \end{pmatrix} =$ $= \begin{pmatrix} (4x+1)+1 & -(4x+1) \\ -2(4x+1) & 2(4x+1)+1 \end{pmatrix} = M(4x+1)$, pentru orice număr real x	3p 2p
c)	$M(x) \cdot M(1) \cdot M(1) = (M(x) \cdot M(1)) \cdot M(1) = M(4x+1) \cdot M(1) = M(16x+5)$, pentru orice număr real x $M(16x+5) = M(x+2)$, de unde obținem $16x+5 = x+2$, deci $x = -\frac{1}{5}$	3p 2p
2.a)	$(-1) \circ 0 = 5 \cdot (-1) \cdot 0 + 10 \cdot (-1) + 10 \cdot 0 + 18 =$ $= -10 + 18 = 8$	3p 2p
b)	$x \circ y = 5xy + 10x + 10y + 20 - 2 = 5x(y+2) + 10(y+2) - 2 =$ $= (5x+10)(y+2) - 2 = 5(x+2)(y+2) - 2$, pentru orice numere reale x și y	3p 2p

c)	$m \circ m = 5(m+2)^2 - 2$, pentru orice număr întreg m	2p
	$5(m+2)^2 - 2 = m \Rightarrow (m+2)(5m+9) = 0$ și, cum m este număr întreg, obținem $m = -2$	3p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = \frac{2x(x-1) - (x^2+1)}{(x-1)^2} + \frac{1}{x-1} =$	3p
	$= \frac{x^2 - 2x - 1 + x - 1}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - x - 2}{(x-1)^2}, x \in (1, +\infty)$	2p
b)	$f(2) = 5, f'(2) = 0$	2p
	Ecuția tangentei este $y - f(2) = f'(2)(x - 2)$, adică $y = 5$	3p
c)	$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 2$; pentru $x \in (1, 2] \Rightarrow f'(x) \leq 0$, deci f este descrescătoare pe $(1, 2]$ și pentru $x \in [2, +\infty) \Rightarrow f'(x) \geq 0$, deci f este crescătoare pe $[2, +\infty)$	3p
	$f(x) \geq f(2)$, pentru orice $x \in (1, +\infty)$, de unde obținem $\frac{x^2+1}{x-1} + \ln(x-1) \geq 5$, pentru orice $x \in (1, +\infty)$	2p
2.a)	$\int_0^2 f(x)(6x^2+1) dx = \int_0^2 (x+4) dx = \left(\frac{x^2}{2} + 4x \right) \Big _0^2 =$	3p
	$= 2 + 8 = 10$	2p
b)	$\int_0^2 \left(f(x) - \frac{4}{6x^2+1} \right) dx = \int_0^2 \frac{x}{6x^2+1} dx = \frac{1}{12} \int_0^2 \frac{(6x^2+1)'}{6x^2+1} dx = \frac{1}{12} \ln(6x^2+1) \Big _0^2 =$	3p
	$= \frac{1}{12} \ln 25 = \frac{\ln 5}{6}$	2p
c)	$\int_0^1 \frac{x+4}{f(x)} \cdot e^{2x} dx = \int_0^1 (6x^2+1) \cdot e^{2x} dx = \int_0^1 (6x^2+1) \cdot \left(\frac{e^{2x}}{2} \right)' dx = (6x^2+1) \cdot \left(\frac{e^{2x}}{2} \right) \Big _0^1 - \int_0^1 6xe^{2x} dx =$	3p
	$= \frac{7e^2-1}{2} - 3xe^{2x} \Big _0^1 + \frac{3e^{2x}}{2} \Big _0^1 = 2e^2 - 2$	2p
	$2e^2 - 2 = m(e^2 - 1)$, de unde obținem $m = 2$	