Examenul național de bacalaureat 2022
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Varianta 7

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică
- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $2i(3-i)-6i=2$, unde $i^2=-1$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-mx$, unde m este număr real. Determinați numărul real m pentru care $f(-1)=f(1)$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $27^{x-1}=9^x$.

5p **4.** Determinați probabilitatea ca, alegând un element din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifrele mai mici sau egale cu 3.

5p **5.** În sistemul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,2)$ și $B(1,-1)$. Determinați coordonatele punctului C pentru care $\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{BC}$.

5p **6.** Se consideră expresia $E(x)=\sin 2x-2\,\mathrm{tg}\,x\cdot\sin\frac{2x}{3}$, unde $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. Arătați că $E\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ și $A(x)=\begin{pmatrix}x&1-x&1\\1-x&x&1\\1&1&0\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(0))=2$.

5p **b)** Arătați că $A(1)\cdot A(x)-A(x-1)=2I_3$, pentru orice număr real x.

5p **c)** Determinați numărul real x pentru care $A(1)\cdot A(1)\cdot A(x)=3A(1)+2I_3$.

2. Pe mulțimea $M=[0,+\infty)$ se definește legea de compoziție $x*y=\frac{xy(x+y)}{xy+1}$.

5p **a)** Arătați că $1*3=3$.

5p **b)** Arătați că $e=1$ este elementul neutru al legii de compoziție „*”.

5p **c)** Determinați perechile (m,n) de numere naturale nenule, cu $m\le n$, pentru care $\frac{1}{m}*\frac{1}{n}=\frac{1}{16}\cdot(m*n)$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2-3x+1}{e^x}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{(x-1)(4-x)}{e^x}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Arătați că axa Ox este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că ecuația $f(x)=n$ are soluție unică, pentru orice număr natural nenul n.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\sqrt{x^2+4}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^2\frac{f(x)}{\sqrt{x^2+4}}dx=2$.

5p **b)** Arătați că $\int_0^{\sqrt{5}} f(x)dx = \frac{19}{3}$.

5p **c)** Pentru fiecare număr natural n, $n \geq 2$, se consideră numărul $I_n = \int_1^2 \frac{x^n}{f^2(x)}dx$. Determinați numărul natural n, $n \geq 2$, pentru care $I_{n+2} + 4I_n = \frac{3}{n-1}$.

Examenul național de bacalaureat 2022
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 7

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$2i(3-i)-6i=6i-2i^2-6i=$	**3p**
	$=-2\cdot(-1)=2$	**2p**
2.	$f(-1)=1+m$, $f(1)=1-m$, unde m este număr real	**2p**
	$1+m=1-m$, de unde obținem $m=0$	**3p**
3.	$3^{3x-3}=3^{2x}$, de unde obținem $3x-3=2x$	**3p**
	$x=3$	**2p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile	**2p**
	În mulțimea numerelor naturale de două cifre sunt $3\cdot 4=12$ numere cu cifrele mai mici sau egale cu 3, deci sunt 12 cazuri favorabile, de unde obținem $p=\frac{12}{90}=\frac{2}{15}$	**3p**
5.	B este mijlocul segmentului AC	**3p**
	$\frac{x_C+3}{2}=1$ și $\frac{y_C+2}{2}=-1$, de unde obținem $x_C=-1$ și $y_C=-4$	**2p**
6.	$\sin\frac{\pi}{2}=1$, $\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}=1$, $\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$	**3p**
	$E\left(\frac{\pi}{4}\right)=1-2\cdot 1\cdot\frac{1}{2}=1-1=0$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(0)=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}\Rightarrow\det(A(0))=\begin{vmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=0+1+1-0-0-0=2$	**3p**
b)	$A(1)=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\1&1&0\end{pmatrix}\Rightarrow A(1)\cdot A(x)=\begin{pmatrix}x+1&2-x&1\\2-x&x+1&1\\1&1&2\end{pmatrix}$, pentru orice număr real x	**3p**
	$A(x-1)=\begin{pmatrix}x-1&2-x&1\\2-x&x-1&1\\1&1&0\end{pmatrix}\Rightarrow A(1)\cdot A(x)-A(x-1)=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}=2I_3$, pentru orice număr real x	**2p**
c)	$A(1)\cdot A(1)\cdot A(x)=A(1)\cdot(A(1)\cdot A(x))=A(1)\cdot(A(x-1)+2I_3)=A(x-2)+2I_3+2A(1)$, pentru orice număr real x	**3p**
	$A(x-2)+2I_3+2A(1)=3A(1)+2I_3\Rightarrow A(x-2)=A(1)$, de unde obținem $x-2=1$, deci $x=3$	**2p**

2.a)	$1*3=\frac{1\cdot 3(1+3)}{1\cdot 3+1}=$	**3p**
	$=\frac{3\cdot 4}{4}=3$	**2p**
b)	$x*1=\frac{x\cdot 1\cdot(x+1)}{x\cdot 1+1}=\frac{x(x+1)}{x+1}=x$, pentru orice $x\in M$	**2p**
	$1*x=\frac{1\cdot x\cdot(1+x)}{1\cdot x+1}=\frac{x(x+1)}{x+1}=x$, pentru orice $x\in M$, deci $e=1$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”	**3p**
c)	$\frac{1}{m}*\frac{1}{n}=\frac{m+n}{mn(mn+1)}$; $\frac{1}{16}\cdot(m*n)=\frac{1}{16}\cdot\frac{mn(m+n)}{mn+1}$, pentru orice numere naturale nenule m și n	**3p**
	$m^2n^2=16$ și, cum m și n sunt numere naturale nenule, cu $m\le n$, obținem perechile $(1,4)$ și $(2,2)$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\frac{(2x-3)e^x-(x^2-3x+1)e^x}{(e^x)^2}=$	**3p**
	$=\frac{-x^2+5x-4}{e^x}=\frac{(x-1)(4-x)}{e^x}$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2-3x+1}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x-3}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{e^x}=0$	**3p**
	Dreapta de ecuație $y=0$, adică axa Ox, este asimptota orizontală spre $+\infty$ la graficul lui f	**2p**
c)	$f'(x)=0\Leftrightarrow x=1$ sau $x=4$; pentru orice $x\in(-\infty,1)$, $f'(x)<0\Rightarrow f$ este strict descrescătoare pe $(-\infty,1)$, pentru orice $x\in(1,4)$, $f'(x)>0\Rightarrow f$ este strict crescătoare pe $(1,4)$ și pentru orice $x\in(4,+\infty)$, $f'(x)<0\Rightarrow f$ este strict descrescătoare pe $(4,+\infty)$	**3p**
	Cum $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$, $f(4)=\frac{5}{e^4}<1$ și funcția f este continuă, obținem că ecuația $f(x)=n$ are soluție unică, pentru orice număr natural nenul n	**2p**
2.a)	$\int_0^2\frac{f(x)}{\sqrt{x^2+4}}dx=\int_0^2 xdx=\frac{x^2}{2}\Big\|_0^2=$	**3p**
	$=\frac{4}{2}-0=2$	**2p**
b)	$\int_0^{\sqrt5}f(x)dx=\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt5}(x^2+4)'\sqrt{x^2+4}dx=\frac{1}{3}(x^2+4)\sqrt{x^2+4}\Big\|_0^{\sqrt5}=$	**3p**
	$=\frac{1}{3}(27-8)=\frac{19}{3}$	**2p**
c)	$I_n=\int_1^2\frac{x^n}{x^2(x^2+4)}dx=\int_1^2\frac{x^{n-2}}{x^2+4}dx$, pentru orice număr natural n, $n\ge 2$	**2p**
	$I_{n+2}+4I_n=\int_1^2\frac{x^{n-2}(x^2+4)}{x^2+4}dx=\frac{x^{n-1}}{n-1}\Big\|_1^2=\frac{2^{n-1}-1}{n-1}$, deci $\frac{2^{n-1}-1}{n-1}=\frac{3}{n-1}$, de unde obținem $2^{n-1}=4$, deci $n=3$, care convine	**3p**