Examenul național de bacalaureat 2022
Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Determinați termenul a_1 al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, știind că $a_2=6$ și $a_3=12$.
5p	**2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-5$. Determinați numărul real a pentru care $f(a)+f(2a)=2$.
5p	**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $5^x\cdot\frac{1}{5}=25$.
5p	**4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie multiplu de 16.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,2)$ și $B(1,4)$. Determinați coordonatele punctului C, astfel încât punctul A este mijlocul segmentului BC.
5p	**6.** Se consideră expresia $E(x)=\sin x+\sin\frac{3x}{2}-\cos\frac{x}{2}$, unde x este număr real. Arătați că $E\left(\frac{\pi}{3}\right)=1$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ și $B(x)=\begin{pmatrix}x & 3-x\\ 2-x & x\end{pmatrix}$, unde x este număr real.
5p	**a)** Arătați că $\det A=0$.
5p	**b)** Arătați că $B(x)-B(0)=xA$, pentru orice număr real x.
5p	**c)** Arătați că matricea $C(a)=B(a)\cdot B(1)-B(a+1)$ este inversabilă, pentru orice număr întreg a.
	2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=(2x-1)(2y-1)+1$.
5p	**a)** Arătați că $1*2=4$.
5p	**b)** Determinați numerele reale x pentru care $x*x=2$.
5p	**c)** Determinați numărul întreg nenul m pentru care $m*\left(1+\frac{1}{m}\right)=1$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x^2+1+\ln x$.
5p	**a)** Arătați că $f'(x)=\frac{4x^2+1}{x}$, $x\in(0,+\infty)$.
5p	**b)** Arătați că $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)-\ln x}{x^2+x+4}=2$.
5p	**c)** Demonstrați că funcția f este bijectivă.
	2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\left(e^x+2x^2\right)$.
5p	**a)** Arătați că $\int_0^4\frac{f(x)}{e^x+2x^2}dx=8$.

5p **b)** Arătați că $\int_0^1 \left(f(x) - 2x^3\right) dx = 1$.

5p **c)** Determinați numărul real a pentru care $\int_1^2 \frac{1}{x} \cdot f\left(x^2\right) dx = \frac{e^4 - e}{2} + a$.

Examenul național de bacalaureat 2022
Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$r=a_3-a_2=6$, unde r este rația progresiei aritmetice	**2p**
	$a_1=a_2-r=6-6=0$	**3p**
2.	$a-5+2a-5=2 \Leftrightarrow 3a=12$	**3p**
	$a=4$	**2p**
3.	$5^{x-1}=5^2$, deci $x-1=2$	**3p**
	$x=3$	**2p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile	**2p**
	În mulțimea numerelor naturale de două cifre sunt 6 numere care sunt multipli de 16, deci sunt 6 cazuri favorabile, de unde obținem $p=\frac{6}{90}=\frac{1}{15}$	**3p**
5.	$A\left(\frac{1+x_C}{2},\frac{4+y_C}{2}\right)$, de unde obținem $x_C=5$	**3p**
	$y_C=0$	**2p**
6.	$\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\frac{\pi}{2}=1$, $\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$	**3p**
	$E\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}+1-\frac{\sqrt{3}}{2}=1$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{vmatrix}=1\cdot 1-(-1)\cdot(-1)=$	**3p**
	$=1-1=0$	**2p**
b)	$B(0)=\begin{pmatrix}0 & 3\\ 2 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow B(x)-B(0)=\begin{pmatrix}x & -x\\ -x & x\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=x\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}=xA$, pentru orice număr real x	**2p**
c)	$C(a)=\begin{pmatrix}a & 3-a\\ 2-a & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}a+1 & 2-a\\ 1-a & a+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-a & 2a+1\\ a+1 & 3-2a\end{pmatrix}\Rightarrow \det(C(a))=-10a+5$, pentru orice număr întreg a	**3p**
	$-10a+5=0\Rightarrow a=\frac{1}{2}\notin\mathbb{Z}$, deci matricea $C(a)$ este inversabilă, pentru orice număr întreg a	**2p**
2.a)	$1*2=(2\cdot 1-1)(2\cdot 2-1)+1=$	**3p**
	$=1\cdot 3+1=4$	**2p**

b)	$x * x = 4x^2 - 4x + 2$, pentru orice număr real x $4x^2 - 4x + 2 = 2 \Rightarrow 4x^2 - 4x = 0$, de unde obținem $x = 0$ sau $x = 1$	**2p** **3p**
c)	$m * \left(1 + \frac{1}{m}\right) = (2m - 1)\left(1 + \frac{2}{m}\right) + 1$, pentru orice număr întreg nenul m $(2m-1)\left(1 + \frac{2}{m}\right) = 0$ și, cum m este număr întreg nenul, obținem $m = -2$	**2p** **3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x) = \left(2x^2\right)' + 1' + (\ln x)' =$ $= 4x + \frac{1}{x} = \frac{4x^2 + 1}{x}$, $x \in (0, +\infty)$	**2p** **3p**
b)	$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x) - \ln x}{x^2 + x + 4} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x^2 + 1}{x^2 + x + 4} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2\left(2 + \frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{4}{x^2}\right)} =$ $= \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2 + \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x} + \frac{4}{x^2}} = 2$	**3p** **2p**
c)	$f'(x) > 0$, pentru orice $x \in (0, +\infty) \Rightarrow f$ este strict crescătoare, deci f este injectivă f este continuă, $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$ și $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, deci f este surjectivă, de unde obținem că f este bijectivă	**2p** **3p**
2.a)	$\int_0^4 \frac{f(x)}{e^x + 2x^2}\,dx = \int_0^4 x\,dx = \left.\frac{x^2}{2}\right\|_0^4 =$ $= \frac{16}{2} - 0 = 8$	**3p** **2p**
b)	$\int_0^1 \left(f(x) - 2x^3\right)dx = \int_0^1 xe^x\,dx = \left.xe^x\right\|_0^1 - \int_0^1 e^x\,dx = e - \left.e^x\right\|_0^1 =$ $= e - e + 1 = 1$	**3p** **2p**
c)	$\int_1^2 \frac{1}{x} \cdot f\left(x^2\right)dx = \int_1^2 \frac{1}{x} \cdot x^2\left(e^{x^2} + 2x^4\right)dx = \frac{1}{2}\int_1^2 \left(x^2\right)' e^{x^2}\,dx + \int_1^2 2x^5\,dx = \left.\frac{1}{2}e^{x^2}\right\|_1^2 + \left.\frac{x^6}{3}\right\|_1^2 = \frac{e^4 - e}{2} + 21$ $\frac{e^4 - e}{2} + 21 = \frac{e^4 - e}{2} + a$, de unde obținem $a = 21$	**3p** **2p**