

Filiera vocațională, profilul pedagogic, specializarea învățător-educatoare

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Arătați că $\sqrt{3}(2 - \sqrt{3}) + 3 = \sqrt{12}$.
- 5p 2. Se consideră funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + 1$ și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 2x - 1$. Determinați numerele naturale a pentru care $f(a) > g(a)$.
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{x+2} \cdot 2^{x+1} + 2 \cdot 6^x = 120$.
- 5p 4. Determinați probabilitatea ca, alegând un număr n din mulțimea numerelor naturale nenule mai mici decât 114, acesta să fie divizibil cu 4.
- 5p 5. Determinați numărul real a , știind că punctul $M(a, 15)$ aparține dreptei d de ecuație $y = 3x + 2a$.
- 5p 6. Se consideră triunghiul ABC dreptunghic în A , cu $AB = 3$, $AC = 4$ și înălțimea AD , unde punctul D aparține laturii BC . Arătați că $\sin \sphericalangle BAD = \frac{3}{5}$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x \circ y = 2xy - x - y + 1$.

- 5p 1. Arătați că $(-1) \circ (-1) = 5$.
- 5p 2. Demonstrați că $x \circ y = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(y - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}$, pentru orice numere reale x și y .
- 5p 3. Arătați că $e = 1$ este elementul neutru al legii de compoziție „ \circ ”.
- 5p 4. Arătați că $x \circ \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \circ x = \frac{1}{2}$, pentru orice număr real x .
- 5p 5. Calculați $\frac{1}{3} \circ \frac{2}{4} \circ \frac{3}{5} \circ \dots \circ \frac{2020}{2022}$.
- 5p 6. Determinați numărul real strict pozitiv x , pentru care $\left(\log_2 x + \frac{1}{2}\right) \circ \left(\log_3 x + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

Se consideră matricele $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ și $M(a) = \begin{pmatrix} a & 2 \\ 2 & a \end{pmatrix}$, unde a este număr real.

- 5p 1. Arătați că $A \cdot A = 4I_2$.
- 5p 2. Arătați că $aI_2 + A = M(a)$, pentru orice număr real a .
- 5p 3. Arătați că $M(2) \cdot M(4) = 6M(2)$.
- 5p 4. Determinați perechile (a, b) de numere naturale pentru care $M(a) \cdot M(b) = 7 \cdot I_2 + 4 \cdot A$.
- 5p 5. Determinați numărul natural k pentru care $\det(M(k+2)) \leq 0$.
- 5p 6. Determinați numărul real a , $a < -2$, știind că inversa matricei $M(a)$ este matricea $M(a) - 2 \cdot A$.

Examenul național de bacalaureat 2022
Proba E. c)

Matematică *M_pedagogic*
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Model

Filiera vocațională, profilul pedagogic, specializarea învățător-educatoare

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$\sqrt{3}(2 - \sqrt{3}) + 3 = 2\sqrt{3} - \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} + 3 = 2\sqrt{3}$ $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$, deci $\sqrt{3}(2 - \sqrt{3}) + 3 = \sqrt{12}$	3p 2p
2.	$a + 1 > 2a - 1$ $a < 2$ și cum a este număr natural, obținem $a = 0$ sau $a = 1$	2p 3p
3.	$3^x \cdot 3^2 \cdot 2^x \cdot 2 + 2 \cdot 6^x = 120 \Leftrightarrow 18 \cdot 6^x + 2 \cdot 6^x = 120$, deci $20 \cdot 6^x = 120$ $6^x = 6 \Rightarrow x = 1$	3p 2p
4.	Mulțimea numerelor naturale nenule mai mici decât 114 are 113 elemente, deci sunt 113 cazuri posibile În mulțimea numerelor naturale nenule mai mici decât 114 sunt 28 numere divizibile cu 4, deci sunt 28 cazuri favorabile $p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{28}{113}$	2p 2p 1p
5.	$M(a, 15) \in d \Rightarrow 15 = 3a + 2a$ $15 = 5a \Rightarrow a = 3$	3p 2p
6.	$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = 5$, $AB^2 = BD \cdot BC \Rightarrow BD = \frac{9}{5}$ $\sin \sphericalangle BAD = \frac{BD}{AB} = \frac{3}{5}$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.	$(-1) \circ (-1) = 2 \cdot (-1) \cdot (-1) - (-1) - (-1) + 1 =$ $= 2 + 1 + 1 + 1 = 5$	2p 3p
2.	$x \circ y = 2xy - x - y + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 2x \left(y - \frac{1}{2} \right) - \left(y - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} =$ $= 2 \left(x - \frac{1}{2} \right) \left(y - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2}$, pentru orice numere reale x și y	3p 2p
3.	$x \circ 1 = 2 \left(x - \frac{1}{2} \right) \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} = x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = x$, pentru orice număr real x $1 \circ x = 2 \left(1 - \frac{1}{2} \right) \left(x - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} = x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = x = x \circ 1$, pentru orice număr real x , deci $e = 1$ este elementul neutru al legii de compoziție „ \circ ”	2p 3p

4.	$x \circ \frac{1}{2} = 2 \left(x - \frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, pentru orice număr real x	2p
	$\frac{1}{2} \circ x = 2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) \left(x - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, deci $x \circ \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \circ x = \frac{1}{2}$, pentru orice număr real x	3p
5.	$\frac{1}{3} \circ \frac{2}{4} \circ \frac{3}{5} \circ \dots \circ \frac{2020}{2022} = \left(\frac{1}{3} \circ \frac{1}{2} \right) \circ \frac{3}{5} \circ \dots \circ \frac{2020}{2022} =$	2p
	$= \frac{1}{2} \circ \left(\frac{3}{5} \circ \dots \circ \frac{2020}{2022} \right) = \frac{1}{2}$	3p
6.	$\left(\log_2 x + \frac{1}{2} \right) \circ \left(\log_3 x + \frac{1}{2} \right) = 2 \left(\log_2 x + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) \left(\log_3 x + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} = 2 \cdot \log_2 x \cdot \log_3 x + \frac{1}{2}$,	3p
	$2 \cdot \log_2 x \cdot \log_3 x + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \log_2 x \cdot \log_3 x = 0$, de unde obținem $x = 1$, care convine	2p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.	$A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$	3p
	$4I_2 = 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, deci $A \cdot A = 4I_2$	2p
2.	$aI_2 + A = a \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} =$	3p
	$= \begin{pmatrix} a & 2 \\ 2 & a \end{pmatrix} = M(a)$, pentru orice număr real a	2p
3.	$M(2) \cdot M(4) = (2I_2 + A)(4I_2 + A) = 8I_2 + 6A + 4I_2 =$	3p
	$= 12I_2 + 6A = 6(2I_2 + A) = 6 \cdot M(2)$	2p
4.	$M(a) \cdot M(b) = (ab + 4) \cdot I_2 + (a + b) \cdot A = 7 \cdot I_2 + 4 \cdot A \Rightarrow$	3p
	$\Rightarrow ab = 3$ și $a + b = 4$ și cum a și b sunt numere naturale, obținem perechile $(3,1)$ și $(1,3)$	2p
5.	$M(k+2) = \begin{pmatrix} k+2 & 2 \\ 2 & k+2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(M(k+2)) = (k+2)^2 - 4 = k^2 + 4k$	3p
	$k^2 + 4k \leq 0$ și k număr natural, obținem $k = 0$	2p
6.	$M(a) - 2 \cdot A = \begin{pmatrix} a & 2 \\ 2 & a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -2 \\ -2 & a \end{pmatrix}$	2p
	$M(a) \cdot (M(a) - 2 \cdot A) = (M(a) - 2 \cdot A) \cdot M(a) = I_2$, deci $a^2 = 5$, și cum $a < -2$, obținem că $a = -\sqrt{5}$	3p