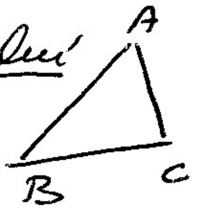
VECTORI ÎN PLAN

1) <u>regula triunghiului</u>



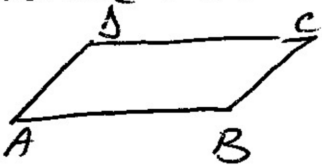
unde se termină primul vector începe cel de-al doilea

Ex1: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$

Ex2: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}$

2) <u>regula paralelogramului</u>

ambii vectori pornesc din același vârf



Ex1: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$

Ex2: $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}$

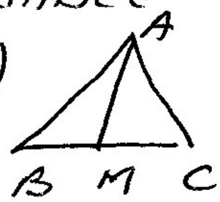
3) <u>modulul unei sume de vectori</u>

- se exprimă suma în funcție de un singur vector, se folosește

$|\alpha \overrightarrow{u}|=|\alpha|\cdot|\overrightarrow{u}|$

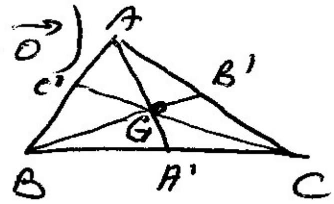
4) AM mediană $\Delta ABC \Leftrightarrow$

$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$



5) G centru greutate $\Delta ABC \Leftrightarrow$

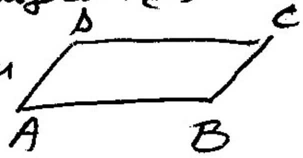
$(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0})$



6) ABCD paralelogram $\Leftrightarrow$

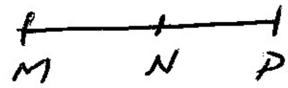
$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ sau

$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$



7) <u>vectori opuși</u>

N mijl MP $\Leftrightarrow$



$\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{PN}=\overrightarrow{0}$

sau $\overrightarrow{NM}+\overrightarrow{NP}=\overrightarrow{0}$

Obs.: $-\overrightarrow{ST}=\overrightarrow{TS}$

1) în ΔSTQ, cu regula triungh. exprimați $\overrightarrow{ST}, \overrightarrow{TQ}, \overrightarrow{QS}, \overrightarrow{SQ}, \overrightarrow{TS}, \overrightarrow{QT}$

2) în PQRS paralelogram, exprimați cu regula paralelogr.

$\overrightarrow{PR}, \overrightarrow{QS}, \overrightarrow{RP}, \overrightarrow{SQ}$

3) ABCD drept cu $AB=4$, $AD=3$, k

care: a) $|\overrightarrow{AB}+5\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AD}|$

b) $|\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}+7\overrightarrow{BD}|$

c) $|\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{BD}|$

d) $|\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BC}+5\overrightarrow{CA}|$

4) ΔPQR, PA mediană $\Leftrightarrow$

- - - - - -

5) ΔPQR, G centru greut $\Leftrightarrow$

6) PQRS paral $\Leftrightarrow$ - - - - - -

COLINIARITATEA VECTORILOR ȘI A PUNCTELOR

1) **Pentru a arăta că doi vectori sunt coliniari**

E_1) fixăm o bază formată din 2 vectori ce au un pct comun

E_2) exprimăm fiecare din cei doi vectori în funcție de vectorii din bază

E_3) arăt. că au coord. proporț.

2) **Pentru a arăta că trei puncte M, N, P coliniare**

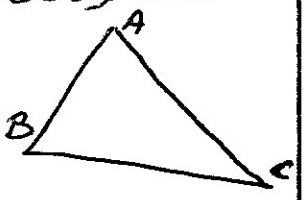
E_1) fixăm o bază formată din 2 vectori ce au un punct comun

E_2) exprimăm doi dintre vect formați cu aceste puncte (de exemplu $\overrightarrow{MN}$ și $\overrightarrow{MP}$) în funcție de vectorii din bază

E_3) arăt că au coord proporț

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow \overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP} \text{ coliniari} \\ \text{Dar, } M \text{ pct comun}\end{array}\right\} \Rightarrow M, N, P \text{ coliniare}$$

ΔABC, $\overrightarrow{AM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{CN} = \frac{7}{10}\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{BP} = -\frac{2}{7}\overrightarrow{PC}$. Arătați că M, N, P coliniare



1) ΔABC, $\overrightarrow{AM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{CN} = \frac{7}{3}\overrightarrow{NA}$, $\overrightarrow{BP} = -\frac{2}{7}\overrightarrow{PC}$, studiați dacă M, N, P coliniare

2) ΔABC, $\overrightarrow{AM} = -3\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AN} = -3\overrightarrow{AC}$, studiați $\overrightarrow{MN}$ și $\overrightarrow{BC}$ coliniare

3) ABCD paralelogram, $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$, studiați dacă M, N, D coliniare

4) ABCD paralelogr, $\overrightarrow{AE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$, studiați dacă C, E, F coliniare

5) ΔABC, $M \in (AB)$, $N \in (AC)$ cu $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} = \frac{1}{3}$, studiați dacă $\overrightarrow{MN}$ și $\overrightarrow{BC}$ coliniari

VECTORI CU COORDONATE

1) legătura între coord. pct. și vectori

Dacă $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B) \Rightarrow$

$\vec{AB} = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j}$

2) coord vectori

Dacă $\vec{u} = x_u\vec{i} + y_u\vec{j} \Rightarrow$ coord(x_u, y_u)

3) egalitatea a 2 vectori

$\vec{u} = x_u\vec{i} + y_u\vec{j}$; $\vec{v} = x_v\vec{i} + y_v\vec{j}$

atunci $\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} x_u = x_v \\ y_u = y_v \end{cases}$ și

4) modulul (lungimea) unui vector

$\vec{u} = x_u\vec{i} + y_u\vec{j} \Rightarrow |\vec{u}| = \sqrt{x_u^2 + y_u^2}$

5) condiția ca 2 vectori coliniari

$\vec{u}$ și $\vec{v}$ coliniari $\Leftrightarrow \boxed{\frac{x_u}{x_v} = \frac{y_u}{y_v}}$

6) condiția ca 2 vectori perpendiculari

$\vec{u}$ și $\vec{v}$ perpend $\Leftrightarrow \boxed{x_u x_v + y_u y_v = 0}$

7) produs scalar

$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\widehat{u,v})$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = x_u x_v + y_u y_v$

8) cosinusul unghiului 2 vectori

$\cos(\widehat{u,v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{x_u x_v + y_u y_v}{\sqrt{x_u^2 + y_u^2} \cdot \sqrt{x_v^2 + y_v^2}}$

Obs.: $\cos(\widehat{u,v}) > 0 \Leftrightarrow (\widehat{u,v})$ ascuțit

$\cos(\widehat{u,v}) < 0 \Leftrightarrow (\widehat{u,v})$ obtuz

---

1) $A(1,3)$, $B(2,5) \Rightarrow$

$\vec{AB} = (2-1)\vec{i} + (5-3)\vec{j} \Rightarrow \vec{AB} = \vec{i} + 2\vec{j}$

2) $m, n = ?$ dacă $\vec{u} = \vec{v}$ pt

$\vec{u} = 3\vec{i} + (m+1)\vec{j}$, $\vec{v} = (n-1)\vec{i} + 6\vec{j}$

$\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 = n-1 \\ m+1 = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} n = 4 \\ m = 5 \end{matrix}$

3) $\vec{u} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$, $|\vec{u}| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$

4) $\vec{u} = 2\vec{i} + 4\vec{j}$, $\vec{v} = a\vec{i} + 6\vec{j}$

$a = ?$ dacă a) $\vec{u}$ și $\vec{v}$ coliniari

b) $\vec{u}$ și $\vec{v}$ perpendiculari

---

a) $\vec{u}$ și $\vec{v}$ coliniari $\Leftrightarrow \frac{2}{a} = \frac{4}{6} \Rightarrow a = 3$

b) $\vec{u}$ și $\vec{v}$ perpend $\Leftrightarrow 2a + 4 \cdot 6 = 0 \Rightarrow a = -12$

5) $\vec{u} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$, $\vec{v} = 4\vec{i} + 5\vec{j}$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \cdot 4 + (-3) \cdot 5 = 8 - 15 = -7$

6) $|\vec{u}| = 4$, $|\vec{v}| = 5$, $m(\widehat{u,v}) = 60°$

$\Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 4 \cdot 5 \cos 60° = 20 \cdot \frac{1}{2} = 10$

7) $\cos(\widehat{u,v}) = ?$ pt

$\vec{u} = 2\vec{i}$, $\vec{v} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$. Unghiul e ascuțit sau obtuz?

$\cos(\widehat{u,v}) = \frac{2 \cdot 3 + 0 \cdot (-4)}{\sqrt{2^2 + 0^2} \cdot \sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

$\cos(\widehat{u,v}) > 0 \Rightarrow$ unghi ascuțit

8) $\vec{u} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$, $\vec{v} = 4\vec{i} - 5\vec{j}$

$2\vec{u} + 3\vec{v} = 2(3\vec{i} + 2\vec{j}) + 3(4\vec{i} - 5\vec{j}) = 18\vec{i} - 9\vec{j}$

Calculați: a) $\vec{AB}$; b) $\vec{CD}$

c) $m, n = ?$ pt $\vec{AC} = \vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{BD}$

d) $|\vec{AB}|$, $|\vec{CD}|$ pt $m = 1$, $n = 2$

e) $m, n = ?$ dacă $\vec{AB}$, $\vec{CD}$ coliniari

f) $m, n = ?$ dacă $\vec{AB}$, $\vec{CD}$ perpendic.

g) pt $m = 1$, $n = 2$ se cer $\vec{AB} \cdot \vec{CD}$

1) $A(1,2)$, $B(0,-1)$, $C(m,1)$, $D(0,3)$

2) $A(m,1)$, $B(2,1)$, $C(3,4)$, $D(1,-2)$

3) $A(0,2)$, $B(n,0)$, $C(3,2)$, $D(0,1)$

4) $A(-1,4)$, $B(2,-1)$, $C(m,1)$, $D(0,5)$

5) $A(4,3)$, $B(n,2)$, $C(5,1)$, $D(-1,4)$

BAZELE TRIGONOMETRIEI

1) T. Pitagora:

$a^2=b^2+c^2 \Leftrightarrow m(A)=90^\circ$

2) trig Δ dreptunghic

$\boxed{\sin ∢ = \frac{\text{cat op}}{\text{ip}}}$; $\boxed{\cos ∢ = \frac{\text{cat alăt}}{\text{ip}}}$

$\boxed{\text{tg} ∢ = \frac{\text{cat op}}{\text{cat alăt}}}$; $\boxed{\text{ctg} ∢ = \frac{\text{cat op}}{\text{cat alăt}}}$

3) echivalența grade ⟷ radiani

grade → radiani: regula 3 simplă

radiani → grade: înlocuim π cu 180°

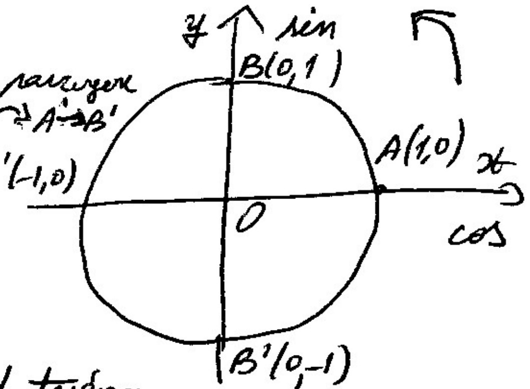
4) tabelul trig

	0°	30°	45°	60°	90°
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tg	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	\
ctg	\	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
linie de construcție	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$

5) cercul trigonometric

$R=1$

sens de parcurgere $A \to B \to A' \to B'$



a) Coord trigon

$M(x_M, y_M) \Rightarrow \begin{cases} x_M = \cos ∢ \\ y_M = \sin ∢ \end{cases}$

b) Intersecția axele

$\begin{cases} \cos 0^\circ \overset{A}{=} 1 \\ \sin 0^\circ \overset{A}{=} 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \cos 90^\circ \overset{B}{=} 0 \\ \sin 90^\circ \overset{B}{=} 1 \end{cases}$

$\begin{cases} \cos 180^\circ \overset{A'}{=} -1 \\ \sin 180^\circ \overset{A'}{=} 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \cos 270^\circ \overset{B'}{=} 0 \\ \sin 270^\circ \overset{B'}{=} -1 \end{cases}$

c) semne cadrane

Cd I: $\begin{cases} \cos>0 \\ \sin>0 \end{cases}$ Cd II $\begin{cases} \cos<0 \\ \sin>0 \end{cases}$

Cd III $\begin{cases} \cos<0 \\ \sin<0 \end{cases}$ Cd IV $\begin{cases} \cos>0 \\ \sin<0 \end{cases}$

6) formule fund trig

$\sin^2 x+\cos^2 x=1, \forall x \in \mathbb{R}$

1) transformați în grade sau în radiani: a) 15° b) $\frac{7\pi}{6}$

a) $180^\circ - - - \pi$
$15^\circ - - - x \Rightarrow x = \frac{15^\circ \cdot \pi}{180^\circ} = \frac{\pi}{12}$

b) $\frac{7\pi}{6} = 7 \cdot \frac{180^\circ}{6} = 210^\circ$

2) calculați $\sin x$ dacă $x \in$ Cd IV și $\cos x = \frac{1}{3}$

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \sin^2 x + \frac{1}{9} = 1$

$\Rightarrow \sin^2 x = \frac{8}{9} \Rightarrow \sin x = \pm \frac{2\sqrt{2}}{3}$ $\Big\} \Rightarrow$

Dar, $x \in$ Cd IV $\Rightarrow \sin x < 0$

$\Rightarrow \sin x = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$

transformați în grade (radiani)

1) 75° 2) 105° 3) 135° 4) 120°

5) $\frac{\pi}{12}$ 6) $\frac{5\pi}{6}$ 7) $\frac{3\pi}{4}$ 8) $\frac{7\pi}{6}$

calculați $\sin x$, $\cos x$, $\text{tg}\, x$ sau $\text{ctg}\, x$ în cazurile

1) $x \in$ Cd II, $\cos x = -\frac{1}{5}$

2) $x \in$ Cd III, $\sin x = -\frac{1}{4}$

3) $x \in$ Cd IV, $\cos x = \frac{2}{3}$

FORMULE TRIGONOMETRICE FUNDAMENTALE

1) paritate, imparitate

$\boxed{\cos(-x) = \cos x}$ $\boxed{\sin(-x) = -\sin x}$

$\boxed{tg(-x) = -tg\, x}$ $\boxed{ctg(-x) = -ctg\, x}$

2) formule pt sumă, diferență

a) $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$

b) $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$

c) $tg(a+b) = \frac{tg a + tg b}{1 - tg a\, tg b}$

$tg(a-b) = \frac{tg a - tg b}{1 + tg a\, tg b}$

☺ calculați $\cos 15°$

$\cos 15° = \cos(45° - 30°) =$

$= \cos 45° \cos 30° + \sin 45° \sin 30° =$

$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

☹ calculați cos, sin, tg pt

1) $75°$ 2) $105°$ 3) $210°$ 4) $300°$

5) $120°$ 6) $225°$ 7) $240°$ 8) $330°$

☹ calculați $\cos 2a$, $\sin 2a$, $tg\, 2a$

pt 1) $\cos a = \frac{1}{3}$, $a \in Cd\ IV$

2) $\sin a = -\frac{1}{5}$, $a \in Cd\ III$

3) $\sin a = \frac{1}{4}$, $a \in Cd\ II$

3) formule pt dublul unghi

a) $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$

$\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$

$\cos 2a = 1 - 2\sin^2 a$

b) $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$

c) $tg\, 2a = \frac{2\, tg\, a}{1 - tg^2 a}$

4) formule pt jumătatea unghi

- se deduc din $\cos 2a$

a) $\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}$

b) $\sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$

☺ calculați $\cos \frac{5\pi}{8}$

$\frac{5\pi}{8} = \frac{5 \cdot 180°^{(4}}{8} = \frac{5 \cdot 45°}{2} = \frac{225°}{2}$ nu ajută

Folosim $\cos^2 a = \frac{1+\cos 2a}{2} \Rightarrow$

$\cos^2 \frac{5\pi}{8} = \frac{1 + \cos \frac{5\pi}{4}}{2} = \frac{1 + \cos 225°}{2}$

$\cos 225° = \cos(180° + 45°) = \cos 180° \cos 45° - \sin 180° \sin 45°$

$= -1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 0 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow \cos^2 \frac{5\pi}{8} = \frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$

$\cos \frac{5\pi}{8} = \pm\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}} = \pm\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ $\Rightarrow$

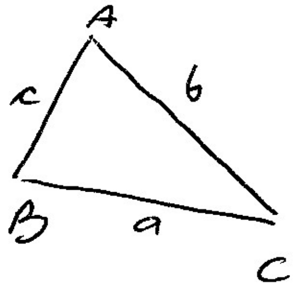
Dar, $\frac{5\pi}{8} \in (\pi; \frac{3\pi}{2}) \Rightarrow \cos \frac{5\pi}{8} < 0$

$\cos \frac{5\pi}{8} = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

☹ calculați $\sin \frac{\pi}{12}$, $\sin \frac{11\pi}{12}$, $\cos \frac{\pi}{8}$, $\cos \frac{7\pi}{8}$

RELAȚII TRIGONOMETRICE APLICATE ÎN GEOMETRIE

1) T cosinusului



$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

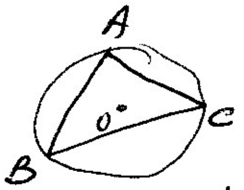
sau

$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$

sau

$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

2) T sinusurilor



$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$ unde

R raza cerc circumscris Δ

3) Aria (suprafața) triunghiului

$S=\frac{b\cdot h}{2}=\frac{ab\sin C}{2}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

cu $p=\frac{a+b+c}{2}$

$S=r\cdot p$, r raza cerc înscris

$S=\frac{abc}{4R}$, R raza cerc circum

4) deducere r și R

$r=\frac{S}{p}$, $R=\frac{abc}{4S}$

5) Aria (suprafața) paralelogr

$S=b\cdot h$

☺ $AB=6$, $AC=5$, $m(A)=60^\circ$; $BC=?$

$BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cdot\cos A\Rightarrow$

$BC^2=36+25-2\cdot6\cdot5\cdot\frac{1}{2}$

$BC^2=61-30\Rightarrow BC=\sqrt{31}$

☺ $m(B)=60^\circ$; $R=1$, $AC=?$

T sin $\Rightarrow\frac{AC}{\sin B}=2R\Rightarrow\frac{AC}{\frac{\sqrt3}{2}}=2\cdot1$

$\Rightarrow AC=2\cdot\frac{\sqrt3}{2}\Rightarrow AC=\sqrt3$

☺ $a=4$, $b=6$, $c=8$, se cere a) $r=$ b) $R=$

a) $r=\frac{S}{p}$, $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

$p=\frac{a+b+c}{2}=\frac{4+6+8}{2}=9$

$\Rightarrow S=\sqrt{9(9-4)(9-6)(9-8)}=3\sqrt{15}$

$\Rightarrow r=\frac{3\sqrt{15}}{9}=\frac{\sqrt{15}}{3}$

b) $R=\frac{abc}{4S}=\frac{\cancel{4}\cdot6\cdot8}{\cancel{4}\cdot3\sqrt{15}}=\frac{16}{\sqrt{15}}=\frac{16\sqrt{15}}{15}$

☹ Găsiți latura necunoscută

1) $AB=\sqrt3$, $BC=4$, $m(B)=30^\circ$

2) $AC=3$, $BC=\sqrt2$, $m(B)=45^\circ$

3) $AB=4$, $AC=\sqrt3$, $m(A)=150^\circ$

4) $AC=\sqrt2$, $BC=4$, $m(C)=135^\circ$

☹ 1) $a=\sqrt6$, $c=\sqrt3$, $m(A)=45^\circ$; $m(C)=?$

2) $a=6$, $m(A)=60^\circ$, $m(B)=45^\circ$; $b=?$

3) $R=?$ dacă $BC=6$, $\cos A=\frac{2\sqrt2}{3}$

☹ $r=?$, $R=?$ pentru

1) $a=5$, $b=4$, $c=7$

2) $a=3$, $b=5$, $c=6$

3) $a=5$, $b=7$, $c=10$

4) $a=7$, $b=11$, $c=5$