MATRICI

1) egalitatea a două matrici

$A = B \iff A$ și B sunt de același tip și au toate elementele corespunzătoare egale

2) adunarea, scăderea matricilor

- se adună (scad) elementele corespunzătoare

3) înmulțirea cu un scalar

- se înmulțește fiecare element cu acel scalar

4) înmulțirea a două matrici

- se înmulțesc corespunzător elementele primei linii cu cele ale primei coloane, se adună rezultatele

5) transpusa unei matrici

schimbă toate liniile în coloane

6) definiția inversei unei matrici

Dacă pt A matrice pătratică există matrice B cu $A\cdot B = I_n$ atunci A e inversabilă și $A^{-1} = B$

7) calculul inversei unei matrici

E_1) dacă A pătratică, calc. $\det A$

E_2) dacă $\det A = 0 \Rightarrow \nexists A^{-1}$

dacă $\det A \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1} \Rightarrow E_3$)

E_3) calculăm transpusa, ${}^tA$

E_4) din ${}^tA$ calc. A^* (adjuncta)

unde $a^*_{lc} = (-1)^{l+c}\cdot$ (determ. obț. prin tăierea liniei l, coloanei j)

E_5) $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}\cdot A^*$

---

1) Dacă $A=\begin{pmatrix}2&3\\4&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-3&5\\2&7\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}4&1&3\\0&-2&2\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&4\\2&0&1\end{pmatrix}$, se cere:

a) $A+B=\begin{pmatrix}2-3&3+5\\4+2&1+7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&8\\6&8\end{pmatrix}$

b) $A-B=\begin{pmatrix}2+3&3-5\\4-2&1-7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&-2\\2&-6\end{pmatrix}$

c) $5A=\begin{pmatrix}5\cdot2&5\cdot3\\5\cdot4&5\cdot1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10&15\\20&5\end{pmatrix}$

d) $A\cdot C=\begin{pmatrix}2&3\\4&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&1&3\\0&-2&2\end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix}2\cdot4+4\cdot0&2\cdot1+3\cdot(-2)&2\cdot3+3\cdot2\\4\cdot4+1\cdot0&4\cdot1+1\cdot(-2)&4\cdot3+1\cdot2\end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix}8&-4&12\\16&2&14\end{pmatrix}$

e) $D^{-1}=?$

$\det\Delta=\begin{vmatrix}1&2&3\\0&1&4\\2&0&1\end{vmatrix}=1+16+0-6-0-0=$

$=11\neq0\Rightarrow\exists A^{-1}$

${}^t\Delta=\begin{pmatrix}1&0&2\\2&1&0\\3&4&1\end{pmatrix}$, $\Delta^*=?$

$d^*_{11}=(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}1&0\\4&1\end{vmatrix}=1\cdot(1-0)=1$

$d^*_{12}=(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix}2&0\\3&1\end{vmatrix}=-1\cdot(2-0)=-2$

$d^*_{13}=(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix}2&1\\3&4\end{vmatrix}=1\cdot(8-3)=5$, analog celelalte elemente $\Rightarrow\Delta^*=\begin{pmatrix}1&-2&5\\8&-5&-4\\-2&-4&1\end{pmatrix}$

$\Rightarrow\Delta^{-1}=\dfrac{1}{\det\Delta}\cdot\Delta^*\Rightarrow$

$\Rightarrow\Delta^{-1}=\begin{pmatrix}1/11&-2/11&5/11\\8/11&-5/11&-4/11\\-2/11&-4/11&1/11\end{pmatrix}$

Calculați a) $A+B$ b) $A-B$ c) $3A$ d) $A\cdot C$ e) $C\cdot\Delta$ f) Δ^{-1} pentru

1) $A=\begin{pmatrix}-2&1\\3&-5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3&5\\-4&2\end{pmatrix}$

$C=\begin{pmatrix}2&0&5\\-4&3&-1\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}4&0&-1\\2&0&3\\1&5&2\end{pmatrix}$

2) $A=\begin{pmatrix}-3&2\\5&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&5\\3&7\end{pmatrix}$

$C=\begin{pmatrix}5&1&3\\2&4&-1\end{pmatrix}$, $\Delta=\begin{pmatrix}2&0&5\\0&1&0\\4&2&1\end{pmatrix}$

DETERMINANȚI

1) **calcul determinanți** - există doar pt matrici pătratice

$A=(a) \Rightarrow \det A = a$

$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

$A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} =$

$= aei + bfg + dhc - gec - dbi - hfa$

2) **calcul determ prin formare zerouri**

E_1) se alege un element egal cu 1 (pivot) și formăm zerouri pe linia ce conține pivotul (linia ce conține pivotul se numește linie de pivotare, coloana ce conține pivotul e coloană de pivotare)

E_2) la coloanele diferite de coloana de pivotare, adunăm sau scădem coloana de pivotare înmulțită cu un număr corespunzător să dea rezultat final 0

E_3) $\det A = (-1)^{l+c} \cdot (\text{pivot}) \cdot$ (determinant rămas prin tăierea liniei l, coloana c)

3) **proprietăți ale determinanților**

a) $\det A = \det({}^tA)$

b) dacă o linie (coloană) are toate element egale cu $0 \Rightarrow \det A = 0$

c) dacă schimbăm 2 linii (2 coloane) între ele $\Rightarrow \det A' = -\det A$

d) dacă 2 linii (2 coloane) sunt identice $\Rightarrow \det A = 0$

e) dacă o linie (1 coloană) este înmulț cu $\alpha \Rightarrow \det A' = \alpha \cdot \det A$

f) dacă adun toate celelalte linii la una fixată $\Rightarrow \det A' = \det A$

g) dacă A, B pătratice $\Rightarrow$

$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$

$\det(A^n) = (\det A)^n$

h) **scrierea sub formă de produs**

- se formează zerouri sau se adună toate liniile la una fixată (sau coloane)
- se dă factor comun pe acea linie

☺ Arătați că $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$

$E_1)\ \Delta \xrightarrow[C_3 - C_1 \to C_3]{C_2 - C_1 \to C_2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix} =$

$= (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} b-a & c-a \\ (b-a)(b+a) & (c-a)(c+a) \end{vmatrix}$

$\xrightarrow[\text{factor } C_2]{\text{factor } C_1} (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b+a & c+a \end{vmatrix}$

$= (b-a)(c-a)(c+a-b-a) =$

$= (b-a)(c-a)(c-b)$

☺ Calculați prin formulă dar și prin formare de zerouri:

1) $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$ 2) $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 3 & 5 & -4 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

3) $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 4 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & -4 \end{vmatrix}$ 4) $\Delta_4 = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 7 \\ 1 & 4 & 5 \\ 2 & -4 & 3 \end{vmatrix}$

SISTEME DE ECUAȚII LINIARE

ABORDARE ESENȚIALĂ

1) *rezolvare elementară*: încercăm folosirea metodei reducerii, substituției

2) *sistem incompatibil* (sistem ce nu are soluție) (RA) Pp sist are soluție

met I: se combină ec între ele, se obține contradicție

met II: se încearcă rezolvarea sist, se obține contradicție

3) *regula lui CRAMER*

E_1) calc det A și dacă:

$\det A = 0 \to$ nu pot folosi CRAMER

$\det A \neq 0 \to$ pot folosi CRAMER $\to$

E_2) calc Δ_x obținut din det A prin înlocuirea coloanei lui x cu cea a termenilor liberi, apoi Δ_y din det A prin înloc coloanei lui y cu a termenilor liberi, Δ_z din det A prin înloc coloanei lui z cu cea a termenilor liberi

E_3) $x = \dfrac{\Delta_x}{\det A}$, $y = \dfrac{\Delta_y}{\det A}$, $z = \dfrac{\Delta_z}{\det A}$

Rezolvați $\begin{cases} 2x+y+z=6 \\ x-y+z=2 \\ 3x+y-2z=5 \end{cases}$

met I: din ec (1) $\to y = 6-2x-z$

$\to \begin{cases} x-(6-2x-z)+z=2 \\ 3x+(6-2x-z)-2z=5 \end{cases} \to \begin{cases} 3x+2z=8 \\ x-3z=-1 \quad |\cdot 3 \end{cases}$

"$-$": $11z=11 \to z=1$

$3x+2z=8 \to 3x=6 \to \boxed{x=2}$, $y=6-4-1 \to \boxed{y=1}$

met II CRAMER: $\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 4+3+1+3-2+2 = 11 \neq 0$

$\Delta_x = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 12+5+2+5-6+4 = 22$

$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & -2 \end{vmatrix} = -8+18+5-6-10+12 = 11$

$\Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix} = -10+6+6+18-4-5 = 11$

$x = \dfrac{\Delta_x}{\det A} = \dfrac{22}{11} = 2$, $y = \dfrac{\Delta_y}{\det A} = 1$, $z = \dfrac{\Delta_z}{\det A} = 1$

Arătați că $\begin{cases} x+2y+z=1 \\ 4x-y-2z=5 \\ 5x+y-z=4 \end{cases}$ e incompatibil

E_1) (RA) Pp. sist compatibil $\to$ $\exists x_0, y_0, z_0$ cu $\begin{cases} x_0+2y_0+z_0=1 \\ 4x_0-y_0-2z_0=5 \\ 5x_0+y_0-z_0=4 \end{cases}$

E_2) $(1)+(2) \to 5x_0+y_0-z_0=6$

$(3) \to 5x_0+y_0-z_0=4$

contradicție $\to$ sist incompatibil

Rezolvați elementar și prin CRAMER sistemele

1) $\begin{cases} x+4y+z=10 \\ 2x+y+2z=6 \\ x+y-5z=-2 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 4x+y-z=3 \\ x+y+z=4 \\ x+2y-z=1 \end{cases}$

Arătați că sist INCOMPATIBIL

1) $\begin{cases} x+y+2z=3 \\ 4x+y-5z=1 \\ 9x+3y-8z=2 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x+y-z=4 \\ x-y+3z=5 \\ 3x+3y-5z=3 \end{cases}$