

Examenul național de bacalaureat 2023
Proba E. c)

Matematică $M_{tehnologic}$

Model

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Determinați termenul a_1 al progresiei aritmetice $(a_n)_{n \geq 1}$, știind că $a_2 = 7$ și $a_6 = 23$.
- 5p** 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 8x - 5$. Determinați numărul real a pentru care punctul $A(a, 3a)$ aparține graficului funcției f .
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_4 x + \log_4(3x) = \log_4 12$.
- 5p** 4. Determinați probabilitatea ca, alegând un număr n din mulțimea numerelor naturale de două cifre, \sqrt{n} să fie număr natural par.
- 5p** 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-3, 2)$, $B(1, 4)$ și $C(6, 0)$. Determinați distanța dintre mijloacele segmentelor AB și OC .
- 5p** 6. Se consideră triunghiul ABC , dreptunghic în A , cu $BC = 16$ și măsura unghiului B egală cu 30° . Arătați că aria triunghiului ABC este egală cu $32\sqrt{3}$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ și $B(x) = \begin{pmatrix} x+1 & -3 \\ 2 & x-1 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
- 5p** a) Arătați că $\det A = 9$.
- 5p** b) Determinați numărul real x pentru care $B(3) \cdot B(4) = xB(1)$.
- 5p** c) Determinați numărul real a pentru care matricea $B(a)$ este inversa matricei $C = \frac{1}{9}A$.
2. Se consideră polinomul $f = X^3 + X^2 + mX - 4$, unde m este număr real.
- 5p** a) Pentru $m = 1$, arătați că $f(2) = 10$.
- 5p** b) Pentru $m = -4$, determinați rădăcinile polinomului f .
- 5p** c) Demonstrați că, pentru orice număr natural nenul m , polinomul f **nu** are toate rădăcinile reale.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (-2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x + 2}$.
- 5p** a) Arătați că $f'(x) = \frac{x^2 + 4x - 5}{(x + 2)^2}$, $x \in (-2, +\infty)$.
- 5p** b) Arătați că $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{e^x} = 0$.
- 5p** c) Demonstrați că funcția f este convexă.
2. Se consideră funcția $f: (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + 1 + \frac{1}{\sqrt{x+1}}$.
- 5p** a) Arătați că $\int_1^3 \left(f(x) - \frac{1}{\sqrt{x+1}} \right) dx = 6$.
- 5p** b) Arătați că $\int_0^8 (f(x) - x - 1) dx = 4$.

- 5p** c) Arătați că volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g : [0,3] \rightarrow \mathbb{R}$,
 $g(x) = f(x)$, este egal cu $\pi \left(\frac{91}{3} + \ln 4 \right)$.

Examenul național de bacalaureat 2023
Proba E. c)
Matematică $M_{tehnologic}$
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Model

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$a_6 = a_2 + 4r$, deci $4r = 16$, de unde obținem $r = 4$, unde r este rația progresiei aritmetice $a_1 = a_2 - r = 7 - 4 = 3$	3p 2p
2.	$f(a) = 3a \Leftrightarrow 8a - 5 = 3a$ $a = 1$	3p 2p
3.	$\log_4(3x^2) = \log_4 12$, de unde obținem $3x^2 = 12$ $x = -2$, care nu convine; $x = 2$, care convine	3p 2p
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile Numerele naturale n , de două cifre, pentru care \sqrt{n} este număr natural par sunt 16, 36 și 64, deci sunt 3 cazuri favorabile, de unde obținem $p = \frac{3}{90} = \frac{1}{30}$	2p 3p
5.	$M(-1,3)$ și $N(3,0)$, unde punctele M și N sunt mijloacele segmentelor AB , respectiv OC $MN = \sqrt{(3+1)^2 + (0-3)^2} = \sqrt{25} = 5$	2p 3p
6.	$\sin B = \frac{AC}{BC} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{AC}{16}$, deci $AC = 8$ $AB = \sqrt{BC^2 - AC^2} = 8\sqrt{3}$ și, cum $\mathcal{A}_{\Delta ABC} = \frac{AB \cdot AC}{2}$, obținem $\mathcal{A}_{\Delta ABC} = \frac{8 \cdot 8\sqrt{3}}{2} = 32\sqrt{3}$	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$\det A = \begin{vmatrix} -3 & 3 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -3 \cdot (-1) - 3 \cdot (-2) =$ $= 3 + 6 = 9$	3p 2p
b)	$B(3) = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ și $B(4) = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow B(3) \cdot B(4) = \begin{pmatrix} 14 & -21 \\ 14 & 0 \end{pmatrix} =$ $= 7 \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = 7B(1)$, de unde obținem $x = 7$	3p 2p
c)	$C \cdot B(a) = \begin{pmatrix} \frac{-a+1}{3} & \frac{a+2}{3} \\ \frac{-2a-4}{9} & \frac{-a+7}{9} \end{pmatrix}$, pentru orice număr real a $C \cdot B(a) = B(a) \cdot C = I_2$, de unde obținem $a = -2$	2p 3p

2.a)	$f = X^3 + X^2 + X - 4 \Rightarrow f(2) = 2^3 + 2^2 + 2 - 4 =$ $= 8 + 4 + 2 - 4 = 10$	3p 2p
b)	$f = X^3 + X^2 - 4X - 4 \Rightarrow f = (X + 1)(X - 2)(X + 2)$ Rădăcinile polinomului f sunt $-2, -1$ și 2	2p 3p
c)	$x_1 + x_2 + x_3 = -1, x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = m \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 - 2m$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f Cum m este număr natural nenul, obținem $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 0$, deci polinomul f nu are toate rădăcinile reale	3p 2p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = \frac{(2x-2)(x+2) - (x^2-2x+1) \cdot 1}{(x+2)^2} =$ $= \frac{2x^2+4x-2x-4-x^2+2x-1}{(x+2)^2} = \frac{x^2+4x-5}{(x+2)^2}, x \in (-2, +\infty)$	3p 2p
b)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2-2x+1}{e^x(x+2)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-2}{e^x(x+3)} =$ $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^x(x+4)} = 0$	3p 2p
c)	$f''(x) = \frac{18}{(x+2)^3}, x \in (-2, +\infty)$ $f''(x) > 0$, pentru orice $x \in (-2, +\infty)$, de unde obținem că funcția f este convexă	3p 2p
2.a)	$\int_1^3 \left(f(x) - \frac{1}{\sqrt{x+1}} \right) dx = \int_1^3 (x+1) dx = \left(\frac{x^2}{2} + x \right) \Big _1^3 =$ $= \frac{9}{2} + 3 - \frac{1}{2} - 1 = 6$	3p 2p
b)	$\int_0^8 (f(x) - x - 1) dx = \int_0^8 \frac{1}{\sqrt{x+1}} dx = 2 \int_0^8 (x+1)' \cdot \frac{1}{2\sqrt{x+1}} dx = 2\sqrt{x+1} \Big _0^8 =$ $= 2 \cdot 3 - 2 \cdot 1 = 4$	3p 2p
c)	$V = \pi \int_0^3 g^2(x) dx = \pi \int_0^3 \left((x+1)^2 + 2\sqrt{x+1} + \frac{1}{x+1} \right) dx =$ $= \pi \int_0^3 (x+1)' \left((x+1)^2 + 2\sqrt{x+1} + \frac{1}{x+1} \right) dx = \pi \left(\frac{(x+1)^3}{3} + 4 \cdot \frac{(x+1)\sqrt{x+1}}{3} + \ln(x+1) \right) \Big _0^3 =$ $= \pi \left(\frac{64}{3} + \frac{32}{3} + \ln 4 - \frac{1}{3} - \frac{4}{3} \right) = \pi \left(\frac{91}{3} + \ln 4 \right)$	2p 3p