Examenul național de bacalaureat 2023
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Se consideră numerele complexe $z_1 = 1 + 2i$ și $z_2 = 1 - i$. Arătați că $z_1^2 + 4z_2 = 1$.

5p **2.** Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = 3x + 1$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x) = x^2 + x + m$, unde m este număr real. Determinați numărul real m pentru care graficele funcțiilor f și g au exact un punct comun.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\lg\left(x^2 + 9\right) = 2\lg\left(x\sqrt{10}\right)$.

5p **4.** Se consideră mulțimea A, a numerelor naturale de cel mult două cifre. Determinați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea A, acesta să fie divizibil cu 9.

5p **5.** În triunghiul ABC, punctul M este mijlocul laturii AC, iar punctele D și E aparțin segmentului AB, astfel încât $AD = BE$. Arătați că $\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} = \overrightarrow{CB}$.

5p **6.** Determinați $x \in [0,\pi]$ pentru care $\sin 2x = 1 + \cos 2x$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} a & 1 & 2 \\ 1 & a & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} ax + y + 2z = -2 \\ x + ay - z = 4 \\ 2x + 2y + z = 2 \end{cases}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det\left(A(0)\right) = 1$.

5p **b)** Determinați mulțimea numerelor reale a pentru care sistemul de ecuații are soluție unică.

5p **c)** Pentru $a = 1$, determinați soluțiile (x_0, y_0, z_0) ale sistemului pentru care x_0, y_0 și z_0 sunt numere întregi și $x_0 > y_0 > z_0$.

2. Pe mulțimea $M = [-1,1]$ se definește legea de compoziție $x * y = \dfrac{xy}{1 + \sqrt{\left(1 - x^2\right)\left(1 - y^2\right)}}$.

5p **a)** Arătați că $1 * \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

5p **b)** Arătați că $x * (-x) \geq -x^2$, pentru orice $x \in M$.

5p **c)** Determinați perechile (a,b) de numere din mulțimea M pentru care $a * b = 1$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x - 1 - \ln\left(e^x + x^2\right)$.

5p **a)** Arătați că $f'(x) = \dfrac{x(x-2)}{e^x + x^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați numerele reale a pentru care tangenta la graficul funcției f în punctul de coordonate $(a, f(a))$ este paralelă cu axa Ox.

5p **c)** Determinați imaginea funcției f.

2. Se consideră funcția $f:(-3,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2+1}{\sqrt{x+3}}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^3 f(x)\sqrt{x+3}\,dx=12$.

5p **b)** Arătați că $\int_{-2}^1 \dfrac{f(x)}{x^2+1}dx=2$.

5p **c)** Demonstrați că $\int_0^1 \dfrac{1}{f(x)}dx\le\dfrac{\pi}{2}$.

Examenul național de bacalaureat 2023
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$z_1^2+4z_2=(1+2i)^2+4(1-i)=1+4i+4i^2+4-4i=$	**3p**
	$=5+4\cdot(-1)=5-4=1$	**2p**
2.	$f(x)=g(x)\Rightarrow x^2-2x+m-1=0$	**2p**
	$\Delta=0$ și, cum $\Delta=8-4m$, obținem $8-4m=0$, deci $m=2$	**3p**
3.	$\lg\left(x^2+9\right)=\lg\left(10x^2\right)\Rightarrow x^2+9=10x^2$, de unde obținem $x^2-1=0$	**3p**
	$x=-1$, care nu convine; $x=1$, care convine	**2p**
4.	Mulțimea A are 100 de elemente, deci sunt 100 de cazuri posibile	**2p**
	Numerele din mulțimea A, divizibile cu 9, sunt $9\cdot 0$, $9\cdot 1$, $9\cdot 2$, ... $9\cdot 11$, deci sunt 12 cazuri favorabile, de unde obținem $p=\frac{12}{100}=\frac{3}{25}$	**3p**
5.	$\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AD}$ și $\overrightarrow{ME}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BE}$	**2p**
	$\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{ME}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CB}=\vec{0}+\vec{0}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CB}$	**3p**
6.	$2\sin x\cos x=2\cos^2 x\Leftrightarrow 2\cos x(\sin x-\cos x)=0$	**2p**
	Cum $x\in[0,\pi]$, obținem $x=\frac{\pi}{2}$ sau $x=\frac{\pi}{4}$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det(A(0))=\begin{vmatrix}0&1&2\\1&0&-1\\2&2&1\end{vmatrix}=0\cdot 0\cdot 1+1\cdot(-1)\cdot 2+1\cdot 2\cdot 2-2\cdot 0\cdot 2-1\cdot 1\cdot 1-(-1)\cdot 2\cdot 0=$	**3p**
	$=0-2+4-0-1-0=1$	**2p**
b)	$\det(A(a))=(a-1)^2$, pentru orice număr real a	**3p**
	$\det(A(a))=0\Leftrightarrow a=1$, deci sistemul are soluție unică pentru $a\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$	**2p**
c)	Pentru $a=1$, soluțiile sistemului de ecuații sunt $(\alpha,2-\alpha,-2)$, unde $\alpha\in\mathbb{C}$	**2p**
	Cum α este număr întreg și $\alpha>2-\alpha>-2$, obținem $\alpha=2$ sau $\alpha=3$, deci soluțiile sunt $(2,0,-2)$ și $(3,-1,-2)$	**3p**

2.a)	$1*\frac{1}{2}=\frac{1\cdot\frac{1}{2}}{1+\sqrt{(1-1^2)\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)}}=$	**3p**
	$=\frac{\frac{1}{2}}{1+\sqrt{0}}=\frac{1}{2}$	**2p**
b)	$x*(-x)=\frac{-x^2}{1+\|1-x^2\|}=\frac{-x^2}{2-x^2}$, pentru orice $x\in M$	**3p**
	$(x*(-x))+x^2=\frac{x^2(1-x^2)}{2-x^2}\geq 0$, deci $x*(-x)\geq -x^2$, pentru orice $x\in M$	**2p**
c)	$a*b=1\Rightarrow\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)}=ab-1$, deci $ab\geq 1$	**3p**
	Cum $a,b\in M$, obținem $ab=1$, deci perechile sunt $(-1,-1)$ și $(1,1)$, care convin	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=1-\frac{1}{e^x+x^2}\cdot(e^x+2x)=$	**3p**
	$=\frac{x^2-2x}{e^x+x^2}=\frac{x(x-2)}{e^x+x^2}$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	Tangenta la graficul funcției f în punctul de coordonate $(a,f(a))$ este paralelă cu axa $Ox\Leftrightarrow f'(a)=0$	**3p**
	$\frac{a(a-2)}{e^a+a^2}=0\Leftrightarrow a=0$ sau $a=2$	**2p**
c)	Pentru orice $x\in(-\infty,0]$, $f'(x)\geq 0$, deci f este crescătoare pe $(-\infty,0]$; pentru orice $x\in[0,2]$, $f'(x)\leq 0$, deci f este descrescătoare pe $[0,2]$; pentru orice $x\in[2,+\infty)$, $f'(x)\geq 0$, deci f este crescătoare pe $[2,+\infty)$	**2p**
	Cum f este continuă, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$, $f(0)=-1$ și $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-1$, imaginea funcției f este $(-\infty,-1]$	**3p**
2.a)	$\int_0^3 f(x)\sqrt{x+3}\,dx=\int_0^3(x^2+1)\,dx=\left.\left(\frac{x^3}{3}+x\right)\right\|_0^3=$	**3p**
	$=9+3=12$	**2p**
b)	$\int_{-2}^1\frac{f(x)}{x^2+1}\,dx=\int_{-2}^1\frac{(x+3)'}{\sqrt{x+3}}\,dx=\left.2\sqrt{x+3}\right\|_{-2}^1=$	**3p**
	$=4-2=2$	**2p**
c)	$\frac{1}{f(x)}=\frac{\sqrt{x+3}}{x^2+1}\leq\frac{2}{x^2+1}$, pentru orice $x\in[0,1]$, de unde obținem $\int_0^1\frac{1}{f(x)}\,dx\leq 2\int_0^1\frac{1}{x^2+1}\,dx=$	**3p**
	$=\left.2\operatorname{arctg}x\right\|_0^1=\frac{\pi}{2}$	**2p**