Liceul Teoretic international de informatică București

SIMULARE EXAMEN BACALAUREAT
MATEMATICĂ M-mate-info, 17 ianuarie 2023

Subiectul I (30 puncte)

1. Determinați numărul real *m* pentru care $x_1 = 1 - i$ este soluție a ecuației $x^2 - 2x + m = 0$

2. Determinați $a \in \mathbb{R}^*$ pentru care soluțiile ecuației $2ax^2 + (3a-5)x + a - 3 = 0$ verifică $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} \geq 1$

3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\frac{\log_2(1+x)}{\log_2(1-x)} = 2$

4. Determinați numărul funcțiilor $f : \{1,2,3\} \to \{1,2,3,4\}$ pentru care $f(1)$ este număr prim.

5. În reperul cartezian xOy se consideră $A(-4,0), B(2,2)$. Scrieți ecuația mediatoarei segmentului AB.

6. Rezolvați în $[0, 2\pi)$ ecuația $2\sin^2 x + \sin 2x = 0$

Subiectul II (30 puncte)

1. Se consider matricea $A(m) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & m^2 & 1 \\ m+1 & (m+1)^2 & 1 \end{pmatrix}$

a) Calculați $\det(A(0))$

b) Determinați $m \in \mathbb{R}$ astfel încât matricea $A(m)$ este inversabilă.

c) Aflați $m \in \mathbb{R}$ dacă aria triunghiului ABC este 1 unde $A(1,1), B(m,m^2), C\left(m+1,(m+1)^2\right)$

2. Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea asociativă $x * y = 3xy - 3x - 3y + 4, \forall x, y \in \mathbb{R}$.

a) Determinați $k \in \mathbb{Z}$ astfel încât $x * y = 3(x-1)(y-1) + k, \forall x, y \in \mathbb{R}$

b) Demonstrați că $H = (1, \infty)$ este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea de compoziție *

c) Determinați $x \in \mathbb{R}$ pentru care $x * x * x * x = 28$

Subiectul I (30 puncte)

1. Se consideră $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$

a) Arătați că $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}, \forall x \in \mathbb{R}$

b) Demonstrați că funcția f este inversabilă.

c) Arătați că $f(x) < x, \forall x \in \mathbb{R}$

2. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = e^{-x^2}$ și $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o primitive a sa.

a) Arătați că $\int_0^1 xf(x)\,dx = \frac{e-1}{2e}$

b) Calculați $\lim_{x \to 0} \frac{F(\cos x) - F(1)}{x^2}$

c) Demonstrați că funcția $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = F(x) - f(x)$ are exact un punct de extrem local.