Simulare județeană a Examenului național de bacalaureat 2023
Ianuarie 2023
Proba E.c) - Matematică M_mate-info
Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică
• Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
• Timpul de lucru efectiv este de trei ore

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $[2x+3]=5$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a lui x.

5p **2.** Determinați numărul complex z cu proprietatea $3z+2\bar{z}+15-i=0$.

5p **3.** Să se găsească termenul independent de a din dezvoltarea $\left(\sqrt{a}+\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^{12}$, unde $a>0$.

5p **4.** Să se determine $m\in\mathbb{R}$ pentru care modulul vectorului $\vec{v}=(m-1)\vec{i}+(2m-3)\vec{j}$ are valoarea minimă.

5p **5.** Calculați $tg\frac{x}{2}$ știind că $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ și $\sin x=\frac{1}{2}$.

5p **6.** Să se calculeze măsura unghiului ascuțit dintre dreptele $d_1: 4x+3y-2=0$ și $d_2: x+7y-4=0$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}4-x & 1 & 4\\ 1 & 2-x & 2\\ 2 & 4 & 1-x\end{pmatrix}, x\in\mathbb{R}$

5p **a)** Arătați că $det(A(0))=-21$.

5p **b)** Determinați numerele reale x pentru care $rang(A(x))=3$.

5p **c)** Rezolvați ecuația $det(A(lgx))=0,\ x>0$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă
$$x*y=xy-3x-3y+12.$$

5p **a)** Arătați că $x*y=(x-3)(y-3)+3$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Determinați numerele reale a, pentru care $\underbrace{a*a*\ldots*a}_{de\ 2023\ ori\ a}=4$.

5p **c)** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^x*9^y*27^z=3$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:[1,\infty)\to[1,\infty), f(x)=x\cdot(1+\ln x)$

5p **a)** Arătați că $f'(x)=2+\ln x,\ x\in[1,\infty)$.

5p **b)** Demonstrați că funcția f este bijectivă.

5p **c)** Calculați următoarea limită $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f^{-1}(x)\cdot\ln x}{x}$

2. Se consideră $f_n:\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R}, f_n(x)=\sin x\cdot\cos x\cdot\cos 2x\cdot\ldots\cdot\cos 2^{n-1}x$ și $I_n=\int f_n(x)dx,\ n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Calculați I_1.

5p **b)** Arătați că orice primitivă a funcției f_2 este convexă pe $\left[0,\frac{\pi}{8}\right]$.

5p **c)** Să se determine primitiva funcției f_{2023} care trece prin punctul $A(0,0)$.

Simularea examenului național de bacalaureat 2023
Barem de evaluare și notare
Matematică *M_mate-info*

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct , dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$5 \le 2x+3<6$ $2 \le 2x < 3 \Rightarrow 1 \le x < \frac{3}{2} \Rightarrow x \in [1;\frac{3}{2})$	**2p** **3p**
2.	$z=a+ib,\ cu\ a,b\in\mathbb{R} \qquad 3(a+ib)+2(a-ib)+15-i=0$ $(5a+15)+i(b-1)=0 \Rightarrow a=-3, b=1 \Rightarrow z=-3+i$	**2p** **3p**
3.	$T_{k+1}=C_{12}^k\cdot(\sqrt{a})^{12-k}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^k=C_{12}^k\cdot a^{6-k}$ $6-k=0\Rightarrow k=6\Rightarrow T_7=C_{12}^6$	**3p** **2p**
4.	$\lvert\vec{v}\rvert=\sqrt{(m-1)^2+(2m-3)^2}=\sqrt{5m^2-14m+10}$ $5m^2-14m+10$ minim pentru $m=\frac{14}{10}=\frac{7}{5}$	**3p** **2p**
5.	$sin^2x+cos^2x=1\Rightarrow \lvert cosx\rvert=\frac{\sqrt{3}}{2}$. Cum $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)\Rightarrow cosx=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ $tg\frac{x}{2}=\frac{sinx}{1+cosx}=2+\sqrt{3}$	**2p** **3p**
6.	$m_1=-\frac{4}{3}, m_2=-\frac{1}{7}$ $tg\alpha=\left\lvert\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}\right\rvert=1$, α unghi ascuțit $\Rightarrow \alpha=\frac{\pi}{4}$	**2p** **3p**

SUBIECTUL al II – lea **(30 de puncte)**

1a)	$det(A(0))=\begin{vmatrix}4&1&4\\1&2&2\\2&4&1\end{vmatrix}=$ $=8+16+4-16-32-1=-21$	**2p** **3p**
b)	$det(A(x))=\begin{vmatrix}7-x&7-x&7-x\\1&2-x&2\\2&4&1-x\end{vmatrix}=(7-x)(x^2-3)$ $rang(A(x))=3\Rightarrow det(A(x))\ne0\Rightarrow x\in\mathbb{R}\setminus\{7,\sqrt{3},-\sqrt{3}\}$	**3p** **2p**
c)	$det(A(lgx))=0\Rightarrow(7-lgx)(lg^2x-3)=0\Rightarrow lgx=7, lg^2x=3$ $x=10^7, \qquad x=10^{\sqrt{3}}, \qquad x=10^{-\sqrt{3}}$	**2p** **3p**
2a)	$x*y=x(y-3)-3(y-3)+3=$ $=(x-3)(y-3)+3$	**3p** **2p**
b)	Se demonstrează prin inducție $P(n): \underbrace{a*a*\ldots*a}_{de\ n\ ori\ a}=(a-3)^n+3, n\in\mathbb{N}^*$ $(a-3)^{2023}+3=4\Rightarrow(a-3)^{2023}=1\Rightarrow a=4$	**3p** **2p**
c)	$3^x*9^y*27^z=3\Rightarrow(3^x-3)(9^y-3)(27^z-3)=0$	**2p** **3p**

	$x=1\,, y=\frac{1}{2}\,, z=\frac{1}{3}$	

SUBIECTUL al III – lea **(30 de puncte)**

1a)	$f'(x)=1+\ln x+x\cdot\frac{1}{x}$ $f'(x)=2+\ln x\,, x\geq 1$	**3p** **2p**
b)	$f'(x)>0\,,(\forall)x\geq 1\Rightarrow f$ strict crescătoare pe $[1,\infty)\Rightarrow f$ injectivă . $f(1)=1\,, \lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$ f continuă și strict crescătoare pe $[1,\infty)\Rightarrow Im\,f=[1,\infty)\Rightarrow f$ surjectivă . Cum f este injectivă și surjectivă $\Rightarrow$ f este bijectivă.	**2p** **3p**
c)	$f^{-1}(x)=y\,,\quad y\to\infty\,,\ x=y(1+\ln y)$. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f^{-1}(x)\cdot\ln x}{x}=\lim\limits_{y\to\infty}\frac{y\cdot\ln[y(1+\ln y)]}{y(1+\ln y)}=\lim\limits_{y\to\infty}\frac{\ln y+\ln(1+\ln y)}{1+\ln y}=1$	**2p** **3p**
2a)	$\mathcal{I}_1=\int f_1(x)dx=\int \sin x\cos x\,dx=$ $=\int\sin x\cdot(\sin x)'\,dx=\frac{sin^2x}{2}+\mathcal{C}$	**2p** **3p**
b)	$f_2(x)=\sin x\cos x\cos 2x=\frac{1}{4}\sin 4x\ \,, x\in\left[0,\frac{\pi}{8}\right]$ F_2 primitiva funcției $f_2\Rightarrow F_2''(x)=f_2'(x)=\cos 4x,\ x\in\left[0,\frac{\pi}{8}\right]$ $F_2''(x)\geq 0\,,(\forall)\ x\in\left[0,\frac{\pi}{8}\right]\Rightarrow F_2$ convexă pe $\left[0,\frac{\pi}{8}\right]$	**2p** **3p**
c)	$I_{2023}=\int f_{2023}(x)dx=\frac{1}{2^{2023}}\int\sin(2^{2023}x)dx=-\frac{1}{2^{4046}}\cdot\cos(2^{2023}x)+\mathcal{C}$ $F_{2023}(x)=-\frac{1}{2^{4046}}\cos(2^{2023}x)+c\,, F_{2023}(0)=0\Rightarrow c=\frac{1}{2^{4046}}\Rightarrow$ $\Rightarrow F_{2023}(x)=-\frac{1}{2^{4046}}\cos(2^{2023}x)+\frac{1}{2^{4046}}$	**3p** **2p**