

SIMULARE EXAMEN BACALAUREAT
MATEMATICĂ M-mate-info, martie 2023

Subiectul I (30 puncte)

1. Fie $z_1 = \frac{1+2i}{1-i}$, $z_2 = 7+5i$, calculați $\left| z_1 + \frac{z_2}{2} \right|$
2. Fie $f : (-1,1) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$. Arătați că f este impară.
3. Rezolvați ecuația: $2^x + 2^{2-x} = 5$
4. Determinați câte numere de 3 cifre divizibile cu 5 se pot forma cu cifrele 2,3,4,5,6.
5. Fie $\triangle ABC$, $A(1,2)$; $B(-1,2)$; $C(4,-1)$. Să se scrie ecuația medianei din B.
6. Arătați că $\sin x \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - \cos x \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -1$

Subiectul II (30 puncte)

1. Fie sistemul
$$\begin{cases} x + my + 2z = 1 \\ x + (2m-1)y + 3z = 1 \\ x + my + (m-3)z = 2m-1 \end{cases}$$

- a) Aflați $m \in \mathbb{R}$ pentru care $(1,0,0)$ este soluție.
 - b) Aflați $m \in \mathbb{R}$ pentru care sistemul are soluție unică.
 - c) Pentru $m = 1$ aflați soluția (x_0, y_0, z_0) pentru care $2x_0^2 - y_0^2 + 3z_0^2 = 14$
2. Pe mulțimea $G = [2, \infty)$ definim legea de compoziție $x * y = xy - 2x - 2y + 6$
- a) Arătați că $x * y = (x-2)(y-2) + 2$ și că G este parte stabilă a lui \mathbb{R} în raport cu legea $*$
 - b) Rezolvați ecuația $\underbrace{x * x * \dots * x}_{\text{de } n \text{ ori } x} = 2$
 - c) Calculați $E = 1 * 2 * \dots * 25$

Subiectul III (30 puncte)

1. Fie $f : (0,1) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x \ln x + (1-x) \ln(1-x)$

a) Calculați $f'(x)$

b) Arătați că funcția f este convexă pe $(0,1)$

c) Arătați că $f(x) \geq -\ln 2, \forall x \in (0,1)$

2. Fie $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^{x^2}$

a) Calculați $I = \int_0^1 x f(x) dx$

b) Arătați că $0 \leq \int_0^1 x^2 f(x) dx \leq e$

c) Calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \sqrt{n^2 - k^2}$