



Simulare pentru EXAMENUL DE BACALAUREAT – ianuarie 2023

Probă scrisă la matematică

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Fie $z \in \mathbb{C}$ astfel încât $z + 2\bar{z} = 3 + i$, unde \bar{z} este conjugatul numărului z .
Calculați modulul numărului $\frac{z + 2i}{z}$.
- 5p 2. Determinați valorile parametrului real m , astfel încât funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - (m+1)x + 9$ să verifice condiția $f(x) \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $5 - \sqrt{x+1} = x$.
- 5p 4. Aflați câte numere naturale de patru cifre distincte se pot forma cu elementele mulțimii $\{0, 2, 4, 6\}$.
- 5p 5. Scrieți ecuația înălțimii din B a triunghiului ABC care are vârfurile $A(-1, 1)$, $B(1, 3)$ și $C(4, 2)$.
- 5p 6. Calculați $E(x) = \cos(x + 30^\circ) \cdot \cos(60^\circ - x) + \sin(x - 60^\circ) \cdot \sin(x + 30^\circ)$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. În mulțimea $M_3(\mathbb{R})$ se consideră matricele: $A(a) = \begin{pmatrix} a & -a & -a \\ -a & a & -a \\ -a & -a & a \end{pmatrix}$, $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $O_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
- 5p a) Arătați că $\det(A(-1)) + \det(A(1)) = 0$.
- 5p b) Aflați $a \in \mathbb{R}$ știind că $(A(a))^2 - A(a) - 2I_3 = O_3$.
- 5p c) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația: $\det(A(-1) + xI_3) = 0$.
2. Pe \mathbb{R} se definește legea de compoziție asociativă $x * y = 2xy - 6(x + y) + 21$.
- 5p a) Arătați că $x * y = 2(x - 3)(y - 3) + 3$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.
- 5p b) Demonstrați că $N = \sqrt[3]{-2023} * \sqrt[3]{-2022} * \sqrt[3]{-2021} * \dots * \sqrt[3]{2021} * \sqrt[3]{2022} * \sqrt[3]{2023}$ este număr natural.
- 5p c) Știind că $(G, *)$ este grup, arătați că funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow G$, $f(x) = \frac{1}{2}x + 3$ este un izomorfism de la grupul $((0, +\infty), \cdot)$ la grupul $(G, *)$, unde $G = (3, +\infty)$ și „ \cdot ” reprezintă operația de înmulțire a numerelor reale.



SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2+x+1}}$.

5p a) Arătați că $f'(x) = \frac{3(x+1)}{2(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

5p b) Determinați ecuația asimptotei spre $-\infty$ la graficul funcției f .

5p c) Arătați că $\sqrt{x^2+x+1} + \sqrt{x^4+x^2+1} \geq \frac{2-x-x^2}{2}$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

2. Fie funcția $f: (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ln(1+x)$.

5p a) Arătați că $\int_0^1 (f(x) + \ln(1+x)) dx = \frac{5}{12}$.

5p b) Demonstrați că $\int_0^1 f(x) dx \geq 0$.

5p c) Demonstrați că $\int_0^1 (\ln(1+x) - x) dx \leq -\frac{1}{12}$.

