

Examenul național de bacalaureat 2023

Proba E. c)

Matematică *M_șt-nat*

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Arătați că $2(1+i) - i(2-i) = 1$, unde $i^2 = -1$.
- 5p 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x + 10$. Determinați numărul real a pentru care punctul $A(2a, a)$ aparține graficului funcției f .
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{2x^2 + 2} = 2x$.
- 5p 4. Determinați câte numere naturale impare, de trei cifre, se pot forma cu elementele mulțimii $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.
- 5p 5. Determinați numărul real a pentru care vectorii $\vec{u} = a\vec{i} + (a-1)\vec{j}$ și $\vec{v} = \vec{i} + 2\vec{j}$ sunt coliniari.
- 5p 6. Se consideră triunghiul ABC , dreptunghic în A , cu măsura unghiului B egală cu $\frac{\pi}{6}$ și $BC = 24$. Bisectoarea unghiului C al triunghiului ABC intersectează latura AB în punctul D . Determinați lungimea segmentului CD .

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricele $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $A(x) = \begin{pmatrix} x+1 & -1 & 1 \\ 0 & x & 0 \\ 1 & -1 & x+1 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
- 5p a) Arătați că $\det(A(1)) = 3$.
- 5p b) Determinați numărul real x pentru care $A(0) \cdot A(x) = A(0)$.
- 5p c) Determinați numerele reale a și b pentru care $(A(1))^{-1} = aA(1) + bI_3$, unde $(A(1))^{-1}$ este inversa matricei $A(1)$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = xy + x + y - 1 + 2^{xy}$.
- 5p a) Arătați că $1 * 2 = 8$.
- 5p b) Arătați că $e = 0$ este elementul neutru al legii de compoziție „*”.
- 5p c) Determinați numărul natural nenul n pentru care $n * \left(-\frac{1}{n}\right) = 0$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2x+1+\ln x}{x}$.
- 5p a) Arătați că $f'(x) = -\frac{\ln x}{x^2}$, $x \in (0, +\infty)$.
- 5p b) Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f .
- 5p c) Demonstrați că $\frac{\ln y}{y} - \frac{\ln x}{x} < \frac{1}{x} - \frac{1}{y}$, pentru orice $x, y \in (1, +\infty)$ cu $x < y$.
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + x$.
- 5p a) Arătați că $\int_3^5 (f(x) - x^3) dx = 8$.

5p b) Arătați că $\int_0^2 \frac{x^2}{f(x) - x + 2} dx = \frac{\ln 5}{3}$.

5p c) Se consideră funcția $g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{f(x)e^{-x}}{x}$. Arătați că orice primitivă $G : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ a funcției g este concavă.

Examenul național de bacalaureat 2023

Proba E. c)

Matematică *M_șt-nat*

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$2(1+i) - i(2-i) = 2 + 2i - 2i + i^2 =$ $= 2 - 1 = 1$	3p 2p
2.	$f(2a) = a \Leftrightarrow 6a + 10 = a$ $a = -2$	3p 2p
3.	$2x^2 + 2 = 4x^2$, de unde obținem $x^2 - 1 = 0$ $x = -1$, care nu convine; $x = 1$, care convine	2p 3p
4.	Cifra unităților se poate alege în două moduri Pentru fiecare alegere a cifrei unităților, cifra zecilor se poate alege în 5 moduri și, pentru fiecare alegere a cifrei unităților și a cifrei zecilor, cifra sutelor se poate alege în 4 moduri, deci se pot forma $2 \cdot 5 \cdot 4 = 40$ de numere	2p 3p
5.	$\frac{a}{1} = \frac{a-1}{2}$ $a = -1$	3p 2p
6.	$AC = 12$; $\sphericalangle ACD = \frac{\pi}{6}$ $\frac{AC}{CD} = \cos \frac{\pi}{6}$, de unde obținem $CD = 8\sqrt{3}$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$\det(A(1)) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 0 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot 1 - (-1) \cdot 0 \cdot 2 - 0 \cdot (-1) \cdot 2 =$ $= 4 + 0 + 0 - 1 - 0 - 0 = 3$	3p 2p
b)	$A(0) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $A(0) \cdot A(x) = \begin{pmatrix} x+2 & -x-2 & x+2 \\ 0 & 0 & 0 \\ x+2 & -x-2 & x+2 \end{pmatrix}$, pentru orice număr real x $x = -1$	3p 2p
c)	$(A(1))^{-1} = aA(1) + bI_3 \Leftrightarrow aA(1) \cdot A(1) + bA(1) = I_3$ și $A(1) \cdot A(1) = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$, de unde obținem $\begin{pmatrix} 5a+2b & -4a-b & 4a+b \\ 0 & a+b & 0 \\ 4a+b & -4a-b & 5a+2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $a = -\frac{1}{3}$ și $b = \frac{4}{3}$	3p 2p

2.a)	$1 * 2 = 1 \cdot 2 + 1 + 2 - 1 + 2^{1 \cdot 2} =$ $= 4 + 4 = 8$	3p 2p
b)	$x * 0 = x \cdot 0 + x + 0 - 1 + 2^{x \cdot 0} = x$, pentru orice număr real x $0 * x = 0 \cdot x + 0 + x - 1 + 2^{0 \cdot x} = x$, pentru orice număr real x , deci $e = 0$ este elementul neutru al legii de compoziție „*”	2p 3p
c)	$n * \left(-\frac{1}{n}\right) = \frac{2n^2 - 3n - 2}{2n}$, pentru orice număr natural nenul n $\frac{2n^2 - 3n - 2}{2n} = 0 \Rightarrow 2n^2 - 3n - 2 = 0$ și, cum n este număr natural nenul, obținem $n = 2$	2p 3p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = \frac{\left(2 + \frac{1}{x}\right) \cdot x - (2x + 1 + \ln x)}{x^2} =$ $= \frac{2x + 1 - 2x - 1 - \ln x}{x^2} = -\frac{\ln x}{x^2}$, $x \in (0, +\infty)$	3p 2p
b)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 1 + \ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 + \frac{1}{x}\right) = 2$ Ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f este $y = 2$	3p 2p
c)	$f'(x) < 0$, pentru orice $x \in (1, +\infty) \Rightarrow f$ este strict descrescătoare pe $(1, +\infty)$ $1 < x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$, deci $\frac{\ln y}{y} - \frac{\ln x}{x} < \frac{1}{x} - \frac{1}{y}$, pentru orice $x, y \in (1, +\infty)$ cu $x < y$	2p 3p
2.a)	$\int_3^5 (f(x) - x^3) dx = \int_3^5 x dx = \frac{x^2}{2} \Big _3^5 =$ $= \frac{25}{2} - \frac{9}{2} = 8$	3p 2p
b)	$\int_0^2 \frac{x^2}{f(x) - x + 2} dx = \int_0^2 \frac{x^2}{x^3 + 2} dx = \frac{1}{3} \int_0^2 \frac{(x^3 + 2)'}{x^3 + 2} dx = \frac{1}{3} \ln(x^3 + 2) \Big _0^2 =$ $= \frac{\ln 10}{3} - \frac{\ln 2}{3} = \frac{\ln 5}{3}$	3p 2p
c)	$g(x) = (x^2 + 1)e^{-x}$ și $G'(x) = g(x)$, pentru orice $x \in (0, +\infty)$, deci $G''(x) = (-x^2 + 2x - 1)e^{-x}$ $G''(x) = -(x - 1)^2 e^{-x} \leq 0$, pentru orice $x \in (0, +\infty)$, deci funcția G este concavă	3p 2p

Examenul național de bacalaureat 2023

Proba E. c)

Matematică *M_șt-nat*

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$2(1+i) - i(2-i) = 2 + 2i - 2i + i^2 =$ $= 2 - 1 = 1$	3p 2p
2.	$f(2a) = a \Leftrightarrow 6a + 10 = a$ $a = -2$	3p 2p
3.	$2x^2 + 2 = 4x^2$, de unde obținem $x^2 - 1 = 0$ $x = -1$, care nu convine; $x = 1$, care convine	2p 3p
4.	Cifra unităților se poate alege în două moduri Pentru fiecare alegere a cifrei unităților, cifra zecilor se poate alege în 5 moduri și, pentru fiecare alegere a cifrei unităților și a cifrei zecilor, cifra sutelor se poate alege în 4 moduri, deci se pot forma $2 \cdot 5 \cdot 4 = 40$ de numere	2p 3p
5.	$\frac{a}{1} = \frac{a-1}{2}$ $a = -1$	3p 2p
6.	$AC = 12$; $\sphericalangle ACD = \frac{\pi}{6}$ $\frac{AC}{CD} = \cos \frac{\pi}{6}$, de unde obținem $CD = 8\sqrt{3}$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$\det(A(1)) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 0 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot 1 - (-1) \cdot 0 \cdot 2 - 0 \cdot (-1) \cdot 2 =$ $= 4 + 0 + 0 - 1 - 0 - 0 = 3$	3p 2p
b)	$A(0) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $A(0) \cdot A(x) = \begin{pmatrix} x+2 & -x-2 & x+2 \\ 0 & 0 & 0 \\ x+2 & -x-2 & x+2 \end{pmatrix}$, pentru orice număr real x $x = -1$	3p 2p
c)	$(A(1))^{-1} = aA(1) + bI_3 \Leftrightarrow aA(1) \cdot A(1) + bA(1) = I_3$ și $A(1) \cdot A(1) = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$, de unde obținem $\begin{pmatrix} 5a+2b & -4a-b & 4a+b \\ 0 & a+b & 0 \\ 4a+b & -4a-b & 5a+2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $a = -\frac{1}{3}$ și $b = \frac{4}{3}$	3p 2p

2.a)	$1 * 2 = 1 \cdot 2 + 1 + 2 - 1 + 2^{1 \cdot 2} =$ $= 4 + 4 = 8$	3p 2p
b)	$x * 0 = x \cdot 0 + x + 0 - 1 + 2^{x \cdot 0} = x$, pentru orice număr real x $0 * x = 0 \cdot x + 0 + x - 1 + 2^{0 \cdot x} = x$, pentru orice număr real x , deci $e = 0$ este elementul neutru al legii de compoziție „*”	2p 3p
c)	$n * \left(-\frac{1}{n}\right) = \frac{2n^2 - 3n - 2}{2n}$, pentru orice număr natural nenul n $\frac{2n^2 - 3n - 2}{2n} = 0 \Rightarrow 2n^2 - 3n - 2 = 0$ și, cum n este număr natural nenul, obținem $n = 2$	2p 3p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = \frac{\left(2 + \frac{1}{x}\right) \cdot x - (2x + 1 + \ln x)}{x^2} =$ $= \frac{2x + 1 - 2x - 1 - \ln x}{x^2} = -\frac{\ln x}{x^2}$, $x \in (0, +\infty)$	3p 2p
b)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 1 + \ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 + \frac{1}{x}\right) = 2$ Ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f este $y = 2$	3p 2p
c)	$f'(x) < 0$, pentru orice $x \in (1, +\infty) \Rightarrow f$ este strict descrescătoare pe $(1, +\infty)$ $1 < x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$, deci $\frac{\ln y}{y} - \frac{\ln x}{x} < \frac{1}{x} - \frac{1}{y}$, pentru orice $x, y \in (1, +\infty)$ cu $x < y$	2p 3p
2.a)	$\int_3^5 (f(x) - x^3) dx = \int_3^5 x dx = \frac{x^2}{2} \Big _3^5 =$ $= \frac{25}{2} - \frac{9}{2} = 8$	3p 2p
b)	$\int_0^2 \frac{x^2}{f(x) - x + 2} dx = \int_0^2 \frac{x^2}{x^3 + 2} dx = \frac{1}{3} \int_0^2 \frac{(x^3 + 2)'}{x^3 + 2} dx = \frac{1}{3} \ln(x^3 + 2) \Big _0^2 =$ $= \frac{\ln 10}{3} - \frac{\ln 2}{3} = \frac{\ln 5}{3}$	3p 2p
c)	$g(x) = (x^2 + 1)e^{-x}$ și $G'(x) = g(x)$, pentru orice $x \in (0, +\infty)$, deci $G''(x) = (-x^2 + 2x - 1)e^{-x}$ $G''(x) = -(x - 1)^2 e^{-x} \leq 0$, pentru orice $x \in (0, +\infty)$, deci funcția G este concavă	3p 2p