Simulare județeană a Examenului național de bacalaureat 2023
Ianuarie 2023
Proba E.c) - Matematică M_*șt-naturii*
Varianta 1

Filiera teoretică, profil real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Să se arate că $\frac{1+3i}{1-3i}+\frac{1-3i}{1+3i}$ este număr real.

5p **2.** Se consideră funcția $f : R \to R, f(x) = 2^{x-1}$. Să se calculeze:
$$f(1) + f(2) + f(3) + \ldots + f(2013)$$

5p **3.** Câți termeni iraționali conține dezvoltarea $(1+\sqrt{3})^8$?

5p **4.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x+1} = 5 - x$

5p **5.** Să se determine numerele reale a știind că lungimea segmentului determinat de punctele $A(-1,2)$ și $B(4-a, 4+a)$ este egală cu 5.

5p **6.** Știind că $x \in (\pi, \frac{3\pi}{2})$ și $\cos x = -\frac{2\sqrt{6}}{5}$, să se calculeze $\sin x$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră sistemul $\begin{cases} x + 4y + 4z = 15 \\ 3x + (a+4)y + 5z = 22 \\ 3x + 2y + (3-a)z = 16 \end{cases}$, unde $a \in \mathbb{R}$.

5p **a)** Pentru $a = 1$ să se calculeze determinantul matricei asociate sistemului.

5p **b)** Să se arate că tripletul $(7,1,1)$ nu poate fi soluție a sistemului oricare ar fi $a \in \mathbb{R}$.

5p **c)** Să se determine soluția (x_0, y_0, z_0) a sistemului pentru care $y_0 + z_0 = 3$.

2. În mulțimea numerelor reale definim operația $x * y = 2xy - 6x - 6y + 21$.

5p **a)** Să se verifice dacă $x * y = 2(x-3)(y-3) + 3$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

5p **b)** Să se rezolve, în mulțimea numerelor reale, ecuația $x * x = 11$.

5p **c)** Știind că operația „$*$ ” este asociativă, să se calculeze $1 * \sqrt{2} * \sqrt{3} * \ldots * \sqrt{2013}$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

5p **a)** Să se determine asimptotele la graficul funcției f .

5p **b)** Să se determine punctele de extrem ale funcției f.

5p **c)** Să se arate că $e^{\pi} > \pi^{e}$.

2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{-x^3+2x^2-5x+8}{x^2+4}$

5p **a)** Să se calculeze $\int (x + f(x) - 2)dx$.

5p **b)** Să se calculeze $\int f(x)dx$

5p **c)** Să se determine primitiva $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a funcției $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = (x^2+4)f(x)$, astfel încât $G(1) = -\frac{1}{12}$

Simularea examenului național de bacalaureat 2023
Barem de evaluare și notare
Matematică ***M_st.naturii***

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct , dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I		**(30 de puncte)**
1.	$\frac{1+3i}{1-3i}+\frac{1-3i}{1+3i}=\frac{(1+3i)^2}{1-(3i)^2}+\frac{(1-3i)^2}{1-(3i)^2}=$	**3p**
	$=\frac{1+6i-9}{10}+\frac{1-6i-9}{10}=\frac{-16}{10}=-\frac{8}{5}$	**2p**
2.	$f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(2013)=2^0+2^1+2^2+\cdots+2^{2012}$	**2p**
	Termenii sumei sunt în progresie geometrică cu $b_1=2^0=1,\ q=2, n=2013$	**1p**
	$2^0+2^1+2^2+\cdots+2^{2012}=\frac{1(2^{2013}-1}{2-1}=2^{2013}-1$	**2p**
3.	$T_{k+1}=C_8^k\sqrt{3}^k=C_8^k 3^{\frac{k}{2}}$	**2p**
	$\frac{k}{2}\in N \Rightarrow k\in\{0,2,4,6,8\}$ deci avem 5 termeni raționali	**2p**
	Dezvoltarea are 9 termeni, așadar 4 termenii vor fi iraționali	**1p**
4.	Se impun condițiile $\begin{cases}x+1\geq 0\\ 5-x\geq 0\end{cases} \Rightarrow x\in[-1,5]$	**2p**
	Prin ridicare la puterea a 2-a ecuația devine x+1 = 25 – 10x + x^2 $\Longrightarrow x^2-11x+24=$	**1p**
	$=0$ care are soluții $x_1=3\in[-1,5]$ și $x_2=8\notin$ [-1, 5]	**2p**
5.	$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}=\sqrt{(4-a+1)^2+(4+a-2)^2}$	**1p**
	$\sqrt{(5-a)^2+(2+a)^2}=5$	**1p**
	$25-10a+a^2+4+4a+a^2=25$	**1p**
	$2a^2-6a+4=0\leftrightarrow a^2-3a+2=0$	
	$a_1=1\ si\ a_2=2$	**1p**
6.	$sin^2x+cos^2x=1\rightarrow sin^2x+\left(-\frac{2\sqrt{6}}{5}\right)^2=1\rightarrow sin^2x=\frac{1}{25}$	**3p**
	$Cum\ sinx<0\ pentru\ x\in\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right) obținem \sin x=-\frac{1}{5}$	**2p**

SUBIECTUL II	(30 de puncte)	
1.a)	$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 3 & 5 & 5 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix}$	**2p**
	$\det A = 0$ *deoarece coloana* 2 *este egala cu coloana* 3	**3p**
1.b)	*Înlocuirea corectă a valorilor* $x = 7, y = 1, z = 1$ *în fiecare ecuație a sistemului* $7 + 4 + 4 = 15$ *adevăr*, $21 + (a + 4) + 5 = 22$ *și* $21 + 2 + (3 - a) = 16$	**2p**
	Rezolvând ecuațiile găsim $a = -8$ *și* $a = 10$	**2p**
	Deci $(7, 1, 1)$ nu poate fi soluție a sistemului	**1p**
1.c)	Înlocuind $y_0 + y_0 = 3$ în prima ecuație a sistemului găsim $x_0 = 3$	**1p**
	Scăzând ultimele două ecuații ale sistemului obținem $(a + 2)(y_0 + z_0) = 6 \Rightarrow (a + 2) * 3 = 6 \Longrightarrow a = 0$	**1p**
	Folosind valorile determinate pentru $x_0 = 3$ *și* $a = 0$ putem rezolva sistemul $\begin{cases} y_0 + z_0 = 3 \\ 4y_0 + 5z_0 = 13 \end{cases}$	**2p**
	De unde obținem $y_0 = 2$ și $z_0 = 1$	**1p**
2.a)	$x * x = 2xy - 6x - 6y + 21 = 2x(y - 3) - 6y + 18 + 3 =$	**2p**
	$= 2x(y - 3) - 6(y - 3) + 3 =$	**2p**
	$= 2(x - 3)(y - 3) + 3$	**1p**
2.b)	$x * x = 2x^2 - 6x - 6x + 21 = 2x^2 - 12x + 21 =$	**1p**
	$= 2x^2 - 12x + 21 = 11 \Longrightarrow 2x^2 - 12x + 10 = 9 \mid : 2$	**2p**
	$x^2 - 6x + 5 = 0, \Delta = 16, x_1 = 1, x_2 = 5$	**2p**
2.c)	Se observă că $x * 3 = 3 * y = 3, \forall\, x, y \in R$	**2p**
	Luăm $x = 1 * \sqrt{2} * \ldots * \sqrt{8}$ *și* $y = \sqrt{10} * \sqrt{11} * \ldots * \sqrt{2013}$	**1p**
	Operația fiind asociativă avem că $1 * \sqrt{2} * \ldots * \sqrt{9} * \sqrt{10} * \ldots * \sqrt{2013} = x * \sqrt{9} * y = x * 3 * y = 3$	**2p**

SUBIECTUL III **(30 de puncte)**

1.a)

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$ **2p**

Rezultă y = 0 asimptotă orizontală spre ∞ **1p**

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{\ln x}{x} = -\infty$ **1p**

Rezultă x = 0 asimptotă verticală la dreapta. **1p**

1.b)

$f'(x) = \left(\frac{(\ln x)}{(x)}\right)' = \frac{(\ln x)' * x - \ln x * (x)'}{x^2} = \frac{\frac{1}{x} * x - \ln x * 1}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$ **1p**

$f'(x) = 0 \Rightarrow 1 - \ln x = 0 \Rightarrow \ln x = 1 \Rightarrow x = e$ **1p**

x	0	e	+∞
$f'(x)$	++++++++++++++++++++++	0	---
$f\ (x)$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$

2p

x = e punct de maxim **1p**

1.c)

$e < \pi, cum\ f\ este\ descrescător\ pe\ (e, +\infty)\ avem\ f(e) > f(\pi)$ **2p**

$\frac{\ln e}{e} > \frac{\ln \pi}{\pi} \Rightarrow \pi \ln e > e \ln \pi \Rightarrow \ln(e^\pi) > \ln(\pi^e) \Rightarrow e^\pi > \pi^e$ **3p**

2.a)

$\int (x + f(x) - 2)dx = \int \left(x + \frac{-x^3 + 2x^2 - 5x + 8}{x^2 + 4} - 2\right) dx =$ **2p**

$= \int \left(\frac{x^3 + 4x - x^3 + 2x^2 - 5x + 8 - 2x^2 - 8}{x^2 + 4}\right) dx =$ **3p**

$= \int \frac{-x}{x^2 + 4} dx = -\frac{1}{2} \int (x^2 + 4)' . \frac{1}{x^2 + 4} dx = -\frac{1}{2} \ln(x^2 + 4) + C$

2.b)

Cum $x + f(x) - 2 = \frac{-x}{x^2+4} \Rightarrow f(x) = -x + 2 - \frac{x}{x^2+4}$ **2p**

$\int f(x)dx = \int \left(-x + 2 - \frac{x}{x^2 + 4}\right) dx = -\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{1}{2}\ln(x^2 + 4) + C$ **3p**

2.c)

$g(x) = (x^2 + 4)f(x) = (x^2 + 4)\frac{-x^3 + 2x^2 - 5x + 8}{x^2+4} = -x^3 + 2x^2 - 5x + 8$ **1p**

$\int g(x)dx = \int (-x^3 + 2x^2 - 5x + 8)dx = -\frac{x^4}{4} + 2\frac{x^3}{3} - 5\frac{x^2}{2} + 8x + C$ **2p**

$\Longrightarrow G(x) = -\frac{x^4}{4} + 2\frac{x^3}{3} - 5\frac{x^2}{2} + 8x + c$

$G(1) = \frac{-1}{4} + \frac{2}{3} - \frac{5}{2} + 8 + C = \frac{71}{12} + c$ **1p**

$G(1) = -\frac{1}{12} \Rightarrow \frac{71}{12} + c = -\frac{1}{12} \Rightarrow c = -6$ deci $G(x) = -\frac{x^4}{4} + 2\frac{x^3}{3} - 5\frac{x^2}{2} + 8x - 6$ **1p**

Str. General Berthelot nr. 28-30, Sector 1, 010168, București
Tel: +40 21 405 62 00, Fax: +40 21 405 63 00
www.edu.ro

Str. N. Iorga nr. 28, 710213, Botoșani
Tel: +40 231584 050, Fax: +40 231584 052
Email: office.isjbt@gmail.com
www.isjbotosani.ro