

Simulare județeană a Examenului național de bacalaureat 2023
Ianuarie 2023
Proba E.c) - Matematică M_șt-naturii
Varianta 1

Filiera teoretică, profil real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I**(30 de puncte)**

- 5p 1. Să se arate că $\frac{1+3i}{1-3i} + \frac{1-3i}{1+3i}$ este număr real.
- 5p 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2^{x-1}$. Să se calculeze:
 $f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(2013)$
- 5p 3. Câți termeni iraționali conține dezvoltarea $(1 + \sqrt{3})^8$?
- 5p 4. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x+1} = 5-x$
- 5p 5. Să se determine numerele reale a știind că lungimea segmentului determinat de punctele $A(-1, 2)$ și $B(4-a, 4+a)$ este egală cu 5.
- 5p 6. Știind că $x \in (\pi, \frac{3\pi}{2})$ și $\cos x = -\frac{2\sqrt{6}}{5}$, să se calculeze $\sin x$.

SUBIECTUL al II-lea**(30 de puncte)**

1. Se consideră sistemul
$$\begin{cases} x + 4y + 4z = 15 \\ 3x + (a+4)y + 5z = 22 \\ 3x + 2y + (3-a)z = 16 \end{cases}$$
, unde $a \in \mathbb{R}$.
- 5p a) Pentru $a = 1$ să se calculeze determinantul matricei asociate sistemului.
- 5p b) Să se arate că tripletul $(7, 1, 1)$ nu poate fi soluție a sistemului oricare ar fi $a \in \mathbb{R}$.
- 5p c) Să se determine soluția (x_0, y_0, z_0) a sistemului pentru care $y_0 + z_0 = 3$.
2. În mulțimea numerelor reale definim operația $x * y = 2xy - 6x - 6y + 21$.
- 5p a) Să se verifice dacă $x * y = 2(x-3)(y-3) + 3$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.
- 5p b) Să se rezolve, în mulțimea numerelor reale, ecuația $x * x = 11$.
- 5p c) Știind că operația „ $*$ ” este asociativă, să se calculeze $1 * \sqrt{2} * \sqrt{3} * \dots * \sqrt{2013}$.

SUBIECTUL al III-lea**(30 de puncte)**

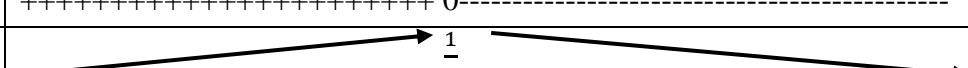
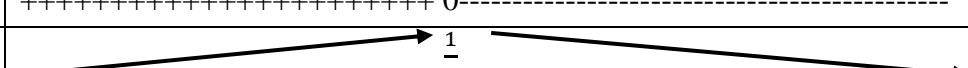
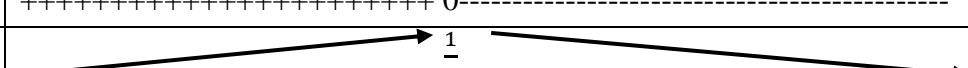
1. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{\ln x}{x}$.
- 5p a) Să se determine asimptotele la graficul funcției f .
- 5p b) Să se determine punctele de extrem ale funcției f .
- 5p c) Să se arate că $e^\pi > \pi^e$.
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{-x^3 + 2x^2 - 5x + 8}{x^2 + 4}$
- 5p a) Să se calculeze $\int (x + f(x) - 2) dx$.
- 5p b) Să se calculeze $\int f(x) dx$
- 5p c) Să se determine primitiva $G: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a funcției $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = (x^2 + 4)f(x)$, astfel încât $G(1) = -\frac{1}{12}$

Simularea examenului național de bacalaureat 2023
Barem de evaluare și notare
Matematică *M_{st.naturii}*

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I		(30 de puncte)
1.	$\frac{1+3i}{1-3i} + \frac{1-3i}{1+3i} = \frac{(1+3i)^2}{1-(3i)^2} + \frac{(1-3i)^2}{1-(3i)^2} =$ $= \frac{1+6i-9}{10} + \frac{1-6i-9}{10} = \frac{-16}{10} = -\frac{8}{5}$	3p 2p
2.	$f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(2013) = 2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{2012}$ Termenii sumei sunt în progresie geometrică cu $b_1 = 2^0 = 1, q = 2, n = 2013$ $2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{2012} = \frac{1(2^{2013} - 1)}{2 - 1} = 2^{2013} - 1$	2p 1p 2p
3.	$T_{k+1} = C_8^k \sqrt{3}^k = C_8^k 3^{\frac{k}{2}}$ $\frac{k}{2} \in \mathbb{N} \Rightarrow k \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$ deci avem 5 termeni raționali Dezvoltarea are 9 termeni, așadar 4 termenii vor fi iraționali	2p 2p 1p
4.	Se impun condițiile $\begin{cases} x + 1 \geq 0 \\ 5 - x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x \in [-1, 5]$ Prin ridicare la puterea a 2-a ecuația devine $x+1 = 25 - 10x + x^2 \Rightarrow x^2 - 11x + 24 = 0$ care are soluții $x_1 = 3 \in [-1, 5]$ și $x_2 = 8 \notin [-1, 5]$	2p 1p 2p
5.	$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(4 - a + 1)^2 + (4 + a - 2)^2}$ $\sqrt{(5 - a)^2 + (2 + a)^2} = 5$ $25 - 10a + a^2 + 4 + 4a + a^2 = 25$ $2a^2 - 6a + 4 = 0 \Leftrightarrow a^2 - 3a + 2 = 0$ $a_1 = 1 \text{ și } a_2 = 2$	1p 1p 1p 1p
6.	$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \rightarrow \sin^2 x + \left(-\frac{2\sqrt{6}}{5}\right)^2 = 1 \rightarrow \sin^2 x = \frac{1}{25}$ $\text{Cum } \sin x < 0 \text{ pentru } x \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right) \text{ obținem } \sin x = -\frac{1}{5}$	3p 2p

SUBIECTUL II		(30 de puncte)
1.a)	$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 3 & 5 & 5 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix}$	2p
	$\det A = 0$ deoarece coloana 2 este egala cu coloana 3	3p
1.b)	Înlocuirea corectă a valorilor $x = 7, y = 1, z = 1$ în fiecare ecuație a sistemului	2p
	$7 + 4 + 4 = 15$ adevăr, $21 + (a + 4) + 5 = 22$ și $21 + 2 + (3 - a) = 16$	2p
	Rezolvând ecuațiile găsim $a = -8$ și $a = 10$ Deci $(7, 1, 1)$ nu poate fi soluție a sistemului	1p
1.c)	Înlocuind $y_0 + z_0 = 3$ în prima ecuație a sistemului găsim $x_0 = 3$	1p
	Scăzând ultimele două ecuații ale sistemului obținem $(a + 2)(y_0 + z_0) = 6 \Rightarrow (a + 2) * 3 = 6 \Rightarrow a = 0$	1p
	Folosind valorile determinate pentru $x_0 = 3$ și $a = 0$ putem rezolva sistemul $\begin{cases} y_0 + z_0 = 3 \\ 4y_0 + 5z_0 = 13 \end{cases}$	2p
	De unde obținem $y_0 = 2$ și $z_0 = 1$	1p
2.a)	$x * x = 2xy - 6x - 6y + 21 = 2x(y - 3) - 6y + 18 + 3 =$	2p
	$= 2x(y - 3) - 6(y - 3) + 3 =$	2p
	$= 2(x - 3)(y - 3) + 3$	1p
2.b)	$x * x = 2x^2 - 6x - 6x + 21 = 2x^2 - 12x + 21 =$	1p
	$= 2x^2 - 12x + 21 = 11 \Rightarrow 2x^2 - 12x + 10 = 9 :2$	2p
	$x^2 - 6x + 5 = 0, \Delta = 16, x_1 = 1, x_2 = 5$	2p
2.c)	Se observă că $x * 3 = 3 * y = 3, \forall x, y \in R$	2p
	Luăm $x = 1 * \sqrt{2} * \dots * \sqrt{8}$ și $y = \sqrt{10} * \sqrt{11} * \dots * \sqrt{2013}$	1p
	Operația fiind asociativă avem că $1 * \sqrt{2} * \dots * \sqrt{9} * \sqrt{10} * \dots * \sqrt{2013} = x * \sqrt{9} * y = x * 3 * y = 3$	2p

SUBIECTUL III		(30 de puncte)											
1.a)	$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$ Rezultă $y = 0$ asimptotă orizontală spre ∞	2p											
	$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\ln x}{x} = -\infty$ Rezultă $x = 0$ asimptotă verticală la dreapta.	1p 1p 1p											
	$f'(x) = \left(\frac{(\ln x)'}{(x)'} \right)' = \frac{(\ln x)' * x - \ln x * (x)'}{x^2} = \frac{\frac{1}{x} * x - \ln x * 1}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$ $f'(x) = 0 \Rightarrow 1 - \ln x = 0 \Rightarrow \ln x = 1 \Rightarrow x = e$ <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 10%; text-align: center;">x</td> <td style="width: 20%; text-align: center;">0</td> <td style="width: 50%; text-align: center;">e</td> <td style="width: 20%; text-align: center;">$+\infty$</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">$f'(x)$</td> <td colspan="3" style="text-align: center;">+++++ 0 -----</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">$f(x)$</td> <td colspan="3" style="text-align: center;">  </td> </tr> </table> x = e punct de maxim	x	0	e	$+\infty$	$f'(x)$	+++++ 0 -----			$f(x)$			
x	0	e	$+\infty$										
$f'(x)$	+++++ 0 -----												
$f(x)$													
1.c)	$e < \pi$, cum f este descrescător pe $(e, +\infty)$ avem $f(e) > f(\pi)$	2p											
	$\frac{\ln e}{e} > \frac{\ln \pi}{\pi} \Rightarrow \pi \ln e > e \ln \pi \Rightarrow \ln(e^\pi) > \ln(\pi^e) \Rightarrow e^\pi > \pi^e$	3p											
2.a)	$\int (x + f(x) - 2) dx = \int \left(x + \frac{-x^3 + 2x^2 - 5x + 8}{x^2 + 4} - 2 \right) dx =$ $= \int \left(\frac{x^3 + 4x - x^3 + 2x^2 - 5x + 8 - 2x^2 - 8}{x^2 + 4} \right) dx =$ $= \int \frac{-x}{x^2 + 4} dx = -\frac{1}{2} \int (x^2 + 4)' \cdot \frac{1}{x^2 + 4} dx = -\frac{1}{2} \ln(x^2 + 4) + C$	2p 3p											
	Cum $x + f(x) - 2 = \frac{-x}{x^2 + 4} \Rightarrow f(x) = -x + 2 - \frac{x}{x^2 + 4}$	2p											
2.b)	$\int f(x) dx = \int \left(-x + 2 - \frac{x}{x^2 + 4} \right) dx = -\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 4) + C$	3p											
2.c)	$g(x) = (x^2 + 4)f(x) = (x^2 + 4) \frac{-x^3 + 2x^2 - 5x + 8}{x^2 + 4} = -x^3 + 2x^2 - 5x + 8$	1p											
	$\int g(x) dx = \int (-x^3 + 2x^2 - 5x + 8) dx = -\frac{x^4}{4} + 2\frac{x^3}{3} - 5\frac{x^2}{2} + 8x + C$	2p											
	$\Rightarrow G(x) = -\frac{x^4}{4} + 2\frac{x^3}{3} - 5\frac{x^2}{2} + 8x + c$	1p											
	$G(1) = \frac{-1}{4} + \frac{2}{3} - \frac{5}{2} + 8 + C = \frac{71}{12} + c$ $G(1) = \frac{-1}{12} \Rightarrow \frac{71}{12} + c = -\frac{1}{12} \Rightarrow c = -6$ deci $G(x) = -\frac{x^4}{4} + 2\frac{x^3}{3} - 5\frac{x^2}{2} + 8x - 6$	1p 1p											