

Examenul național de bacalaureat 2023
Proba E. c)
Matematică $M_mate-info$

Sesiunea vară 2023

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Se consideră numărul complex $z = 3 + i$. Arătați că $z(z - 2i) = 10$.
- 5p** 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 5x + 1$. Arătați că $f(2x) - 2f(x) = -1$, pentru orice număr real x .
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt[3]{x^3 - 2x + 2} = x$.
- 5p** 4. Se consideră mulțimea A , a numerelor naturale de două cifre. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr n din mulțimea A , numărul $n + 5$ să fie multiplu de 10.
- 5p** 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(4, 0)$ și $B(5, 4)$. Determinați ecuația dreptei d care trece prin punctul O și este paralelă cu dreapta AB .
- 5p** 6. Se consideră triunghiul isoscel ABC , dreptunghic în A , cu aria egală cu 4. Arătați că $BC = 4$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & a \\ a & a+1 & -2 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} 2x + y + 2z = 2 \\ x - y + az = 4 \\ ax + (a+1)y - 2z = a \end{cases}$, unde a este număr real.
- 5p** a) Arătați că $\det(A(0)) = 8$.
- 5p** b) Determinați mulțimea numerelor reale a pentru care matricea $A(a)$ este inversabilă.
- 5p** c) Pentru $a = -2$, arătați că $x_0 z_0 + y_0 = -2$, pentru orice soluție (x_0, y_0, z_0) a sistemului de ecuații.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \circ y = xy + (2^x - 2)(2^y - 2)$.
- 5p** a) Arătați că $2 \circ 3 = 18$.
- 5p** b) Arătați că $e = 1$ este elementul neutru al legii de compoziție „ \circ ”.
- 5p** c) Demonstrați că $x \circ (-x) \leq 1$, pentru orice număr real x .

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + 3 \ln \frac{x+3}{x-1}$.
- 5p** a) Arătați că $f'(x) = \frac{x^2 + 2x - 15}{(x-1)(x+3)}$, $x \in (1, +\infty)$.
- 5p** b) Determinați ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcției f .
- 5p** c) Arătați că $\ln \frac{x+3}{3(x-1)} \geq 1 - \frac{x}{3}$, pentru orice $x \in (1, +\infty)$.
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x^2 + 2x)e^{-x}$.
- 5p** a) Arătați că $\int_0^3 f(x)e^x dx = 18$.

- 5p** | **b)** Arătați că $\int_0^1 \frac{f(x)}{x+2} dx = \frac{e-2}{e}$.
- 5p** | **c)** Demonstrați că $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} \int_0^x f(t) dt \right) = 1$.

Examenul național de bacalaureat 2023

Proba E. c)
Matematică $M_mate-info$

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$z(z-2i) = (3+i)(3-i) = 3^2 - i^2 =$ $= 9 + 1 = 10$	3p 2p
2.	$f(2x) = 10x + 1$, pentru orice număr real x $f(2x) - 2f(x) = 10x + 1 - 2(5x + 1) = 10x + 1 - 10x - 2 = -1$, pentru orice număr real x	2p 3p
3.	$x^3 - 2x + 2 = x^3$, deci $-2x + 2 = 0$ $x = 1$	3p 2p
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile În mulțimea A sunt 9 numere n pentru care $n + 5$ este multiplu de 10, deci sunt 9 cazuri favorabile, de unde obținem $p = \frac{9}{90} = \frac{1}{10}$	2p 3p
5.	$m_{AB} = 4$ și, cum $d \parallel AB$, obținem $m_d = 4$ Ecuația dreptei este $y - 0 = 4(x - 0)$, adică $y = 4x$	3p 2p
6.	$AD = \frac{BC}{2}$, unde AD este înălțime în triunghiul ABC $\mathcal{A}_{\Delta ABC} = \frac{AD \cdot BC}{2} = 4$, de unde obținem $BC = 4$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$A(0) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(0)) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} =$ $= 4 + 2 + 0 - 0 - 0 + 2 = 8$	2p 3p
b)	$\det(A(a)) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & a \\ a & a+1 & -2 \end{vmatrix} = -a^2 + 2a + 8$, pentru orice număr real a $\det(A(a)) = 0 \Leftrightarrow a = -2$ sau $a = 4$, deci matricea $A(a)$ este inversabilă dacă și numai dacă $a \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 4\}$	2p 3p
c)	Pentru $a = -2$, soluțiile sistemului de ecuații sunt de forma $(2, -2 - 2\alpha, \alpha)$, cu $\alpha \in \mathbb{C}$ $x_0 z_0 + y_0 = 2\alpha - 2 - 2\alpha = -2$, pentru orice soluție (x_0, y_0, z_0) a sistemului de ecuații	3p 2p
2.a)	$2 \circ 3 = 2 \cdot 3 + (2^2 - 2)(2^3 - 2) =$ $= 6 + 12 = 18$	3p 2p

b)	$x \circ 1 = x \cdot 1 + (2^x - 2)(2^1 - 2) = x + 0 = x$, pentru orice număr real x	2p
	$1 \circ x = 1 \cdot x + (2^1 - 2)(2^x - 2) = x + 0 = x$, pentru orice număr real x , deci $e = 1$ este elementul neutru al legii de compoziție „ \circ ”	3p
c)	$x \circ (-x) = -x^2 + 1 - 2 \cdot 2^x - 2 \cdot 2^{-x} + 4 =$	2p
	$= -x^2 + 1 - 2 \cdot \left(2^x - 2 + \frac{1}{2^x}\right) = 1 - x^2 - 2 \cdot \left(\sqrt{2^x} - \frac{1}{\sqrt{2^x}}\right)^2 \leq 1$, pentru orice număr real x	3p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = 1 + 3(\ln(x+3) - \ln(x-1))' = 1 + \frac{3}{x+3} - \frac{3}{x-1} =$ $= \frac{x^2 + 2x - 3 + 3x - 3 - 3x - 9}{(x+3)(x-1)} = \frac{x^2 + 2x - 15}{(x+3)(x-1)}$, $x \in (1, +\infty)$	3p
		2p
b)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{3}{x} \ln \frac{x+3}{x-1}\right) = 1$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(3 \ln \frac{x+3}{x-1}\right) = 0$, deci dreapta de ecuație $y = x$ este asimptota oblică spre $+\infty$ la graficul funcției f	2p
		3p
c)	$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 3$; $f'(x) \leq 0$, pentru orice $x \in (1, 3] \Rightarrow f$ este descrescătoare pe $(1, 3]$ și $f'(x) \geq 0$, pentru orice $x \in [3, +\infty) \Rightarrow f$ este crescătoare pe $[3, +\infty)$, deci $f(x) \geq f(3)$, pentru orice $x \in (1, +\infty)$	3p
	$f(3) = 3 + 3 \ln 3$, deci $x + 3 \ln \frac{x+3}{x-1} \geq 3 + 3 \ln 3$, pentru orice $x \in (1, +\infty)$, de unde obținem $\ln \frac{x+3}{3(x-1)} \geq 1 - \frac{x}{3}$, pentru orice $x \in (1, +\infty)$	2p
2.a)	$\int_0^3 f(x) e^x dx = \int_0^3 (x^2 + 2x) dx = \left(\frac{x^3}{3} + x^2\right) \Big _0^3 =$ $= \frac{27}{3} + 9 = 18$	3p
		2p
b)	$\int_0^1 \frac{f(x)}{x+2} dx = \int_0^1 x(-e^{-x})' dx = x(-e^{-x}) \Big _0^1 - e^{-x} \Big _0^1 =$ $= -\frac{1}{e} - \frac{1}{e} + 1 = \frac{e-2}{e}$	3p
		2p
c)	$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} \int_0^x f(t) dt\right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\int_0^x f(t) dt\right)'}{(x^2)'} =$ $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+2)e^{-x}}{2} = 1$	2p
		3p