Examenul național de bacalaureat 2023
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Sesiunea specială 2023

Varianta 6

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Arătați că $(2-i)^2+i(4+i)=2$, unde $i^2=-1$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+3$. Determinați numărul real m pentru care $(f\circ f)(m)=2m$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $5^{x+1}-3\cdot 5^x=10$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifrele mai mari sau egale cu 7.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,4)$, $B(3,-2)$ și $C(2a,a)$, unde a este număr real nenul. Arătați că dreptele AB și OC sunt perpendiculare, pentru orice număr real nenul a.

5p **6.** Se consideră expresia $E(x)=\sin x+4\cos\frac{x}{3}\sin\frac{2x}{3}$, unde x este număr real. Arătați că $E\left(\frac{\pi}{2}\right)=4$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} a & -1 & 2a \\ 1 & -2 & a \\ 1 & 1 & 1-a \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} ax-y+2az=0 \\ x-2y+az=0 \\ x+y+(1-a)z=0 \end{cases}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(0))=1$.

5p **b)** Determinați mulțimea numerelor reale a pentru care sistemul de ecuații are soluție unică.

5p **c)** Pentru $a=-1$, determinați soluțiile (x_0,y_0,z_0) ale sistemului pentru care $x_0^2+y_0^2+z_0^2=3$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=x^2y^2-4(x+y)^2+1$.

5p **a)** Arătați că $0*1=-3$.

5p **b)** Arătați că $x*(-1)\le 2x$, pentru orice număr real x.

5p **c)** Determinați perechile (m,n) de numere naturale nenule, cu $m\le n$, pentru care $m*n=1$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x}{5}-\ln\left(x^2+x+5\right)$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{x^2-9x}{5\left(x^2+x+5\right)}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați abscisele punctelor situate pe graficul funcției f în care tangenta la graficul funcției f este paralelă cu axa Ox.

5p **c)** Demonstrați că ecuația $f(x)=0$ are soluție unică.

2. Se consideră funcția $f:(-2,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{4x}{x^3+8}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^2\left(x^3+8\right)f(x)\,dx=8$.

5p **b)** Arătați că $\int_1^4 xf(x)\,dx = 4\ln 2$.

5p **c)** Calculați $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^3}\int_0^x t\cdot f(t)\,dt\right)$.

Examenul național de bacalaureat 2023
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 6

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$(2-i)^2+i(4+i)=4-4i+i^2+4i+i^2=$	**3p**
	$=4-1-1=2$	**2p**
2.	$(f\circ f)(m)=m+6$, pentru orice număr real m	**3p**
	$m+6=2m$, de unde obținem $m=6$	**2p**
3.	$5\cdot 5^x-3\cdot 5^x=10$, deci $2\cdot 5^x=10$, de unde obținem $5^x=5$	**3p**
	$x=1$	**2p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile	**2p**
	Deoarece cifrele pot fi 7, 8 și 9, sunt $3\cdot 3=9$ numere naturale de două cifre care au cifrele mai mari sau egale cu 7, deci sunt 9 cazuri favorabile, de unde obținem $p=\frac{9}{90}=\frac{1}{10}$	**3p**
5.	$m_{AB}=-2$	**2p**
	$m_{OC}=\frac{1}{2}$, pentru orice număr real nenul a și, cum $m_{AB}\cdot m_{OC}=(-2)\cdot\frac{1}{2}=-1$, obținem că dreptele AB și OC sunt perpendiculare, pentru orice număr real nenul a	**3p**
6.	$\sin\frac{\pi}{2}=1$, $\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$	**3p**
	$E\left(\frac{\pi}{2}\right)=1+4\cdot\frac{3}{4}=4$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(0)=\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&-2&0\\1&1&1\end{pmatrix}\Rightarrow\det(A(0))=\begin{vmatrix}0&-1&0\\1&-2&0\\1&1&1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=0+0+0-0-0-(-1)=1$	**3p**
b)	$\det(A(a))=\begin{vmatrix}a&-1&2a\\1&-2&a\\1&1&1-a\end{vmatrix}=(a+1)^2$, pentru orice număr real a	**2p**
	$\det(A(a))=0\Leftrightarrow a=-1$, deci sistemul de ecuații are soluție unică dacă și numai dacă $a\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$	**3p**
c)	Pentru $a=-1$, soluțiile sistemului de ecuații sunt de forma $(-\alpha,-\alpha,\alpha)$, cu $\alpha\in\mathbb{C}$	**2p**
	$x_0^2+y_0^2+z_0^2=3\alpha^2$, deci $3\alpha^2=3$, de unde obținem $\alpha=-1$ sau $\alpha=1$, deci soluțiile sunt $(1,1,-1)$ și $(-1,-1,1)$	**3p**

2.a)	$0*1=0^2\cdot 1^2-4(0+1)^2+1=$	**3p**
	$=0-4+1=-3$	**2p**
b)	$x*(-1)=-3x^2+8x-3=$	**2p**
	$=-3x^2+6x-3+2x=-3(x-1)^2+2x\le 2x$, pentru orice număr real x	**3p**
c)	$m^2n^2-4(m+n)^2+1=1$ și, cum m și n sunt numere naturale nenule, obținem $mn-2m-2n=0$	**2p**
	$(m-2)(n-2)=4$ și, cum m și n sunt numere naturale nenule, cu $m\le n$, perechile sunt $(3,6)$ și $(4,4)$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\frac{1}{5}-\frac{2x+1}{x^2+x+5}=$	**3p**
	$=\frac{x^2+x+5-10x-5}{5(x^2+x+5)}=\frac{x^2-9x}{5(x^2+x+5)}$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	Tangenta la graficul funcției f în punctul de coordonate $(a,f(a))$ este paralelă cu axa $Ox \Leftrightarrow f'(a)=0$	**3p**
	$a^2-9a=0$, de unde obținem $a=0$ sau $a=9$	**2p**
c)	$f'(x)\ge 0$, pentru orice $x\in(-\infty,0]\Rightarrow f$ este crescătoare pe $(-\infty,0]$; $f'(x)\le 0$, pentru orice $x\in[0,9]\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $[0,9]$, deci $f(x)\le f(0)$, pentru orice $x\in(-\infty,9]$	**2p**
	$f'(x)>0$, pentru orice $x\in(9,+\infty)\Rightarrow f$ este strict crescătoare pe $(9,+\infty)$ și, cum $f(0)=-\ln 5<0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ și f este continuă, obținem că ecuația $f(x)=0$ are soluție unică	**3p**
2.a)	$\int_0^2 (x^3+8)f(x)\,dx=\int_0^2 4x\,dx=2x^2\Big\vert_0^2=$	**3p**
	$=8-0=8$	**2p**
b)	$\int_1^4 xf(x)\,dx=\int_1^4\frac{4x^2}{x^3+8}dx=\frac{4}{3}\int_1^4\frac{(x^3+8)'}{x^3+8}dx=\frac{4}{3}\cdot\ln(x^3+8)\Big\vert_1^4=$	**3p**
	$=\frac{4}{3}\ln 8=4\ln 2$	**2p**
c)	$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^3}\int_0^x t\cdot f(t)\,dt\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\left(\int_0^x t\cdot f(t)\,dt\right)'}{(x^3)'}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cdot f(x)}{3x^2}=$	**3p**
	$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{4}{3(x^3+8)}=\frac{1}{6}$	**2p**