

**Examenul național de bacalaureat 2023**  
**Proba E. c)**

**Matematică  $M_{\text{șt-nat}}$**

Sesiune toamnă, 2023

**Varianta 7**

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii*

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

**SUBIECTUL I**

**(30 de puncte)**

- 5p** 1. Arătați că  $3 - 4i + i(4 - i) = 4$ , unde  $i^2 = -1$ .
- 5p** 2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 4 - 2x$ . Arătați că  $(f \circ f)(1) = 0$ .
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $\log_5(x^2 - 2x + 6) = \log_5 6$ .
- 5p** 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie divizibil cu 3 și cu 7.
- 5p** 5. În reperul cartezian  $xOy$  se consideră punctele  $A(1, 2)$ ,  $B(a, 0)$  și  $C(0, b)$ . Determinați numerele reale  $a$  și  $b$ , știind că punctul  $A$  este mijlocul segmentului  $BC$ .
- 5p** 6. Se consideră triunghiul  $ABC$ , cu  $AB = AC = 10$  și  $BC = 16$ . Arătați că  $AD = 6$ , unde  $AD$  este înălțime în triunghiul  $ABC$ .

**SUBIECTUL al II-lea**

**(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele  $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$  și  $B(x) = \begin{pmatrix} x+1 & 2x+1 \\ x-1 & 2x-1 \end{pmatrix}$ , unde  $x$  este număr real.
- 5p** a) Arătați că  $\det(B(2)) = 4$ .
- 5p** b) Determinați numărul real  $a$  pentru care  $B(0) \cdot B(1) = aA$ .
- 5p** c) Determinați numărul real  $x$  pentru care  $A \cdot B(x) = A \cdot (B(0) - 3I_2)$ .
2. Se consideră polinomul  $f = X^3 + 2X^2 + mX - 3$ , unde  $m$  este număr real.
- 5p** a) Pentru  $m = 0$ , arătați că  $f(1) = 0$ .
- 5p** b) Determinați numărul real  $m$  pentru care polinomul  $f$  este divizibil cu polinomul  $X + 1$ .
- 5p** c) Determinați numărul real  $m$  pentru care  $(1 - x_1)(1 - x_2)(1 - x_3) = x_1 x_2 x_3$ , unde  $x_1, x_2$  și  $x_3$  sunt rădăcinile polinomului  $f$ .

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția  $f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{3x^2}{x^2 + x - 2}$ .
- 5p** a) Arătați că  $f'(x) = \frac{3x(x-4)}{(x^2 + x - 2)^2}$ ,  $x \in (1, +\infty)$ .
- 5p** b) Determinați ecuația asimptotei orizontale spre  $+\infty$  la graficul funcției  $f$ .
- 5p** c) Demonstrați că  $f(x) + f(x^2) \geq \frac{17}{3}$ , pentru orice  $x \in (1, 2]$ .
2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x(x-1)^2$ .
- 5p** a) Arătați că  $\int_3^7 \frac{f(x)}{(x-1)^2} dx = 20$ .
- 5p** b) Arătați că  $\int_2^3 \frac{x}{f(x)} dx = \frac{1}{2}$ .

**5p** c) Arătați că  $\int_0^1 \frac{xf(e^x)}{e^x} dx = \frac{e^2 - 5}{4}$ .

Examenul național de bacalaureat 2023  
Proba E. c)

Matematică *M\_șt-nat*  
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianta 7

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$3 - 4i + i(4 - i) = 3 - 4i + 4i - i^2 =$ $= 3 + 1 = 4$	3p 2p
2.	$f(1) = 2$ $(f \circ f)(1) = f(f(1)) = f(2) = 0$	2p 3p
3.	$x^2 - 2x + 6 = 6$ , deci $x^2 - 2x = 0$ $x = 0$ sau $x = 2$ , care convin	2p 3p
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile În mulțimea numerelor naturale de două cifre sunt 4 numere divizibile cu 3 și cu 7, deci sunt 4 cazuri favorabile, de unde obținem $p = \frac{4}{90} = \frac{2}{45}$	2p 3p
5.	$A\left(\frac{a+0}{2}, \frac{0+b}{2}\right)$ $a = 2$ și $b = 4$	3p 2p
6.	Triunghiul $ABD$ este dreptunghic în $D$ și $BD = 8$ $AD = \sqrt{100 - 64} = 6$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$B(2) = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(B(2)) = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot 3 - 5 \cdot 1 =$ $= 9 - 5 = 4$	3p 2p
b)	$B(0) \cdot B(1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = 2A$ $aA = 2A$ , de unde obținem $a = 2$	3p 2p
c)	$A \cdot B(x) = \begin{pmatrix} 3x-1 & 6x-1 \\ -3x+1 & -6x+1 \end{pmatrix}$ , pentru orice număr real $x$ , $A \cdot (B(0) - 3I_2) = \begin{pmatrix} -4 & -7 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 3x-1 & 6x-1 \\ -3x+1 & -6x+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -7 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$ , de unde obținem $x = -1$	3p 2p
2.a)	$f = X^3 + 2X^2 - 3 \Rightarrow f(1) = 1^3 + 2 \cdot 1^2 - 3 =$ $= 1 + 2 - 3 = 0$	3p 2p
b)	$f(-1) = (-1)^3 + 2(-1)^2 + m(-1) - 3 = -m - 2$ $-m - 2 = 0$ , de unde obținem $m = -2$	3p 2p
c)	$(1 - x_1)(1 - x_2)(1 - x_3) = f(1) = m$ , pentru orice număr real $m$ $x_1 x_2 x_3 = 3$ , deci $m = 3$	3p 2p

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

<b>1.a)</b>	$f'(x) = \frac{6x(x^2 + x - 2) - 3x^2(2x + 1)}{(x^2 + x - 2)^2} =$ $= \frac{3x^2 - 12x}{(x^2 + x - 2)^2} = \frac{3x(x - 4)}{(x^2 + x - 2)^2}, x \in (1, +\infty)$	<b>3p</b>  <b>2p</b>
<b>b)</b>	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2}{x^2 + x - 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}} = 3$ <p>Dreapta de ecuație <math>y = 3</math> este asimptota orizontală spre <math>+\infty</math> la graficul funcției <math>f</math></p>	<b>3p</b>  <b>2p</b>
<b>c)</b>	$f'(x) \leq 0$ , pentru orice $x \in (1, 4] \Rightarrow f$ este descrescătoare pe $(1, 4]$ $1 < x \leq 2 \Rightarrow 1 < x^2 \leq 4$ , deci $f(x) \geq f(2)$ și $f(x^2) \geq f(4)$ și, cum $f(2) = 3$ și $f(4) = \frac{8}{3}$ , obținem $f(x) + f(x^2) \geq \frac{17}{3}$ , pentru orice $x \in (1, 2]$	<b>2p</b>  <b>3p</b>
<b>2.a)</b>	$\int_3^7 \frac{f(x)}{(x-1)^2} dx = \int_3^7 x dx = \frac{x^2}{2} \Big _3^7 =$ $= \frac{49}{2} - \frac{9}{2} = 20$	<b>3p</b>  <b>2p</b>
<b>b)</b>	$\int_2^3 \frac{x}{f(x)} dx = \int_2^3 \frac{(x-1)'}{(x-1)^2} dx = -\frac{1}{x-1} \Big _2^3 =$ $= -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$	<b>3p</b>  <b>2p</b>
<b>c)</b>	$\int_0^1 \frac{x f(e^x)}{e^x} dx = \int_0^1 x (e^x - 1)^2 dx = \int_0^1 x \left( \frac{e^{2x}}{2} - 2e^x \right)' dx + \frac{x^2}{2} \Big _0^1 =$ $= x \left( \frac{e^{2x}}{2} - 2e^x \right) \Big _0^1 - \left( \frac{e^{2x}}{4} - 2e^x \right) \Big _0^1 + \frac{1}{2} = \frac{e^2 - 5}{4}$	<b>3p</b>  <b>2p</b>