Examenul național de bacalaureat 2024

Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $0,5+10\cdot(1-0,75)=3$.

5p **2.** Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-1$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=x+1$. Arătați că $f(m)+g(-m)=m$, pentru orice număr real m.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x^2+6}=\sqrt{5x}$.

5p **4.** Se consideră mulțimea $A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea A, acesta să fie divizor al lui 30.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,1)$, $B(2,2)$ și $C(4,0)$. Arătați că triunghiul ABC este dreptunghic în B.

5p **6.** Se consideră $E(x)=3\cos^2 x-\cos\frac{x}{2}\cdot\sin x$, unde x este număr real. Arătați că $E\left(\frac{\pi}{3}\right)=0$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix} x & -2x \\ 1 & x-6 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(6))=12$.

5p **b)** Determinați numărul real a pentru care $A(4)\cdot A(4)=aA(4)$.

5p **c)** Determinați perechile (m,n) de numere naturale nenule, cu $m<n$, pentru care $\det(A(m)+A(n))=0$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=xy(x+y-xy)$.

5p **a)** Arătați că $1*3=3$.

5p **b)** Determinați numerele reale x pentru care $x*2=-x^2$.

5p **c)** Determinați numărul întreg nenul m pentru care $\frac{1}{2m}*m=m$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2-2}{x}-3\ln x$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{x^2-3x+2}{x^2}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Arătați că $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)+3\ln x}{x+1}=1$.

5p **c)** Demonstrați că $\frac{x^2+x-2}{x}\le 3\ln x$, pentru orice $x\in(0,2]$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3+x+1$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^2\left(f(x)-x^3\right)dx=4$.

5p **b)** Arătați că $\int_0^1 \frac{x^2}{f(x)-x}dx = \frac{\ln 2}{3}$.

5p **c)** Determinați $a \in (-\infty, 0)$, știind că $\int_a^0 e^{-x}\left(f'(x)-f(x)\right)dx = 1-a^3e^{-a}$.

Examenul național de bacalaureat 2024
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$0,5+10\cdot(1-0,75)=0,5+10\cdot 0,25=$	**2p**
	$=0,5+2,5=3$	**3p**
2.	$f(m)=2m-1$, pentru orice număr real m	**2p**
	$g(-m)=-m+1\Rightarrow f(m)+g(-m)=2m-1-m+1=m$, pentru orice număr real m	**3p**
3.	$x^2+6=5x$, deci $x^2-5x+6=0$	**2p**
	$x=2$ sau $x=3$, care convin	**3p**
4.	Mulțimea A are 9 elemente, deci sunt 9 cazuri posibile	**2p**
	În mulțimea A sunt 5 divizori ai lui 30, deci sunt 5 cazuri favorabile, de unde obținem $p=\frac{5}{9}$	**3p**
5.	$m_{AB}=1$	**2p**
	$m_{BC}=-1\Rightarrow m_{AB}\cdot m_{BC}=-1$, deci triunghiul ABC este dreptunghic în B	**3p**
6.	$\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$, $\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$	**3p**
	$E\left(\frac{\pi}{3}\right)=3\cdot\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=0$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(6)=\begin{pmatrix}6 & -12\\ 1 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow \det(A(6))=\begin{vmatrix}6 & -12\\ 1 & 0\end{vmatrix}=6\cdot 0-(-12)\cdot 1=$	**3p**
	$=0+12=12$	**2p**
b)	$A(4)=\begin{pmatrix}4 & -8\\ 1 & -2\end{pmatrix}$, $A(4)\cdot A(4)=\begin{pmatrix}8 & -16\\ 2 & -4\end{pmatrix}=2A(4)$	**3p**
	$aA(4)=2A(4)$, de unde obținem $a=2$	**2p**
c)	$A(m)+A(n)=\begin{pmatrix}m+n & -2m-2n\\ 2 & m+n-12\end{pmatrix}\Rightarrow \det(A(m)+A(n))=(m+n)(m+n-8)$, pentru orice numere naturale nenule m și n	**2p**
	$(m+n)(m+n-8)=0$ și, cum m și n sunt numere naturale nenule, cu $m<n$, obținem perechile $(1,7)$, $(2,6)$ și $(3,5)$	**3p**
2.a)	$1*3=1\cdot 3(1+3-1\cdot 3)=$	**3p**
	$=3\cdot 1=3$	**2p**
b)	$x*2=2x(2-x)$, pentru orice număr real x	**2p**
	$2x(2-x)=-x^2$, de unde obținem $x=0$ sau $x=4$	**3p**

c)	$\frac{1}{2m} * m = \frac{2m^2 - m + 1}{4m}$, pentru orice număr real nenul m	**2p**
	$\frac{2m^2 - m + 1}{4m} = m$, deci $2m^2 + m - 1 = 0$ și, cum m este număr întreg nenul, obținem $m = -1$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x) = \frac{2x \cdot x - \left(x^2 - 2\right)}{x^2} - \frac{3}{x} =$	**3p**
	$= \frac{x^2 + 2}{x^2} - \frac{3}{x} = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2}$, $x \in (0, +\infty)$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x) + 3\ln x}{x + 1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 2}{x^2 + x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2\left(1 - \frac{2}{x^2}\right)}{x^2\left(1 + \frac{1}{x}\right)} =$	**3p**
	$= \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1 - \frac{2}{x^2}}{1 + \frac{1}{x}} = 1$	**2p**
c)	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ sau $x = 2$; pentru orice $x \in (0, 1]$, $f'(x) \geq 0 \Rightarrow f$ este crescătoare pe $(0, 1]$ și pentru orice $x \in [1, 2]$, $f'(x) \leq 0 \Rightarrow f$ este descrescătoare pe $[1, 2]$, de unde obținem $f(x) \leq f(1)$, pentru orice $x \in (0, 2]$	**3p**
	$f(1) = -1$, deci $\frac{x^2 - 2}{x} - 3\ln x \leq -1$, de unde obținem $\frac{x^2 + x - 2}{x} \leq 3\ln x$, pentru orice $x \in (0, 2]$	**2p**
2.a)	$\int_0^2 \left(f(x) - x^3\right) dx = \int_0^2 (x + 1) dx = \left.\left(\frac{x^2}{2} + x\right)\right\|_0^2 =$	**3p**
	$= \frac{2^2}{2} + 2 = 4$	**2p**
b)	$\int_0^1 \frac{x^2}{f(x) - x} dx = \int_0^1 \frac{x^2}{x^3 + 1} dx = \frac{1}{3} \int_0^1 \frac{\left(x^3 + 1\right)'}{x^3 + 1} dx = \left.\frac{1}{3} \ln\left(x^3 + 1\right)\right\|_0^1 =$	**3p**
	$= \frac{\ln 2}{3} - \frac{\ln 1}{3} = \frac{\ln 2}{3}$	**2p**
c)	$\int_a^0 e^{-x} \left(f'(x) - f(x)\right) dx = \int_a^0 \left(e^{-x} f(x)\right)' dx = \left.e^{-x} f(x)\right\|_a^0 = 1 - e^{-a}\left(a^3 + a + 1\right)$, unde $a \in (-\infty, 0)$	**3p**
	$1 - e^{-a}\left(a^3 + a + 1\right) = 1 - a^3 e^{-a}$, de unde obținem $a = -1$, care convine	**2p**