

Examenul național de bacalaureat 2023

Proba E. c)

Matematică *M_tehnologic*

Sesiunea vară 2023

Varianta 1

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Arătați că $3 \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} = 4$.
- 5p 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + 2$. Determinați numărul real a pentru care $f(a) = 6$.
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_7(2x + 1) = \log_7 9$.
- 5p 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr n din mulțimea $A = \{1, 2, 3, \dots, 23\}$, acesta să verifice inegalitatea $n \geq 10$.
- 5p 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1, 2)$ și $B(1, 6)$. Determinați coordonatele mijlocului segmentului AB .
- 5p 6. Se consideră triunghiul ABC , dreptunghic în A , cu $AC = \sqrt{2}$ și $BC = 2$. Arătați că triunghiul ABC este isoscel.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ și $C = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.
- 5p a) Arătați că $\det A = -1$.
- 5p b) Arătați că $2B - A = 3C$.
- 5p c) Determinați matricea $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pentru care $2X \cdot A = B + 2C$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = (x - 4)(y - 4) + 4$.
- 5p a) Arătați că $5 * 4 = 4$.
- 5p b) Determinați numărul real x pentru care $x * 6 = 6x$.
- 5p c) Determinați numerele naturale nenule n pentru care $\frac{4}{n} * n > 4$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + 6x^2 - 15x + 9$.
- 5p a) Arătați că $f'(x) = 3(x^2 + 4x - 5)$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p b) Determinați intervalele de monotonie a funcției f .
- 5p c) Arătați că $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{e^x f''(x)} = 0$.
2. Se consideră funcția $f: (-9, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{8x}{x + 9}$.
- 5p a) Arătați că $\int_0^1 (x + 9) \cdot f(x) dx = 4$.
- 5p b) Arătați că $\int_1^6 \frac{1}{8x} \cdot f(x) dx = \ln \frac{3}{2}$.
- 5p c) Determinați numărul real a pentru care $\int_0^3 f(x^2) dx = 6(4 + a\pi)$.

Examenul național de bacalaureat 2023
Proba E. c)
Matematică $M_{tehnologic}$
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianta 1

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$3 \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} = 3 \cdot \frac{3}{2} - \frac{1}{2} =$	3p
	$= \frac{9}{2} - \frac{1}{2} = 4$	2p
2.	$f(a) = a + 2$	2p
	$a + 2 = 6$, de unde obținem $a = 4$	3p
3.	$2x + 1 = 9$	3p
	$x = 4$, care convine	2p
4.	Mulțimea A are 23 de elemente, deci sunt 23 de cazuri posibile	2p
	În mulțimea A sunt 14 numere n care verifică inegalitatea $n \geq 10$, deci sunt 14 cazuri favorabile, de unde obținem $p = \frac{14}{23}$	3p
5.	$x_M = \frac{-1+1}{2} = 0$, unde punctul M este mijlocul segmentului AB	3p
	$y_M = \frac{2+6}{2} = 4$	2p
6.	$AB = \sqrt{BC^2 - AC^2} = \sqrt{2}$	3p
	$AB = AC$, deci triunghiul ABC este isoscel	2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 2 =$	3p
	$= 3 - 4 = -1$	2p
b)	$2B - A = \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 8 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} =$	3p
	$= 3 \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 3C$	2p
c)	$B + 2C = \begin{pmatrix} -2 & 8 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}$, $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$	3p
	$X = \frac{1}{2}(B + 2C) \cdot A^{-1}$, de unde obținem $X = \begin{pmatrix} 9 & -14 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$	2p
2.a)	$5 * 4 = (5 - 4)(4 - 4) + 4 =$	3p
	$= 1 \cdot 0 + 4 = 4$	2p

b)	$x \cdot 6 = 2x - 4$, pentru orice număr real x $2x - 4 = 6x$, de unde obținem $x = -1$	3p 2p
c)	$\left(\frac{4}{n} - 4\right)(n - 4) + 4 > 4 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{n} - 1\right)(n - 4) > 0$, unde n este număr natural nenul Cum n este număr natural nenul, obținem $n = 2$ și $n = 3$	2p 3p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = 3x^2 + 6 \cdot 2x - 15 =$ $= 3x^2 + 12x - 15 = 3(x^2 + 4x - 5), x \in \mathbb{R}$	3p 2p
b)	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -5$ sau $x = 1$ $f'(x) \geq 0$, pentru orice $x \in (-\infty, -5]$, deci f este crescătoare pe $(-\infty, -5]$, $f'(x) \leq 0$, pentru orice $x \in [-5, 1]$, deci f este descrescătoare pe $[-5, 1]$ și $f'(x) \geq 0$, pentru orice $x \in [1, +\infty)$, deci f este crescătoare pe $[1, +\infty)$	2p 3p
c)	$f''(x) = 3(2x + 4), x \in \mathbb{R}$, deci $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{e^x f''(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 4x - 5}{e^x (2x + 4)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 4}{e^x (2x + 6)} =$ $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^x (2x + 8)} = 0$	3p 2p
2.a)	$\int_0^1 (x + 9) \cdot f(x) dx = \int_0^1 8x dx = 4x^2 \Big _0^1 =$ $= 4 - 0 = 4$	3p 2p
b)	$\int_1^6 \frac{1}{8x} \cdot f(x) dx = \int_1^6 \frac{1}{x + 9} dx = \int_1^6 \frac{(x + 9)'}{x + 9} dx = \ln(x + 9) \Big _1^6 =$ $= \ln 15 - \ln 10 = \ln \frac{3}{2}$	3p 2p
c)	$\int_0^3 f(x^2) dx = \int_0^3 \frac{8x^2}{x^2 + 9} dx = 8 \int_0^3 \left(1 - \frac{9}{x^2 + 9}\right) dx = 8x \Big _0^3 - 8 \cdot \frac{9}{3} \arctg \frac{x}{3} \Big _0^3 = 24 - 6\pi$ $24 - 6\pi = 6(4 + a\pi)$, de unde obținem $a = -1$	3p 2p