Examenul național de bacalaureat 2023
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Sesiunea specială 2023

Varianta 6

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Calculați termenul a_3 al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, știind că $a_1 = 10$ și $a_2 = 20$.
5p	**2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+4$. Arătați că $f(0)+f(1)=10$.
5p	**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2(x-4)=\log_2 4$.
5p	**4.** Un produs costă 80 de lei. Determinați prețul produsului după o ieftinire cu 20%.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $M(0,2)$ și $N(3,6)$. Arătați că distanța dintre punctele M și N este egală cu 5.
5p	**6.** Se consideră triunghiul ABC dreptunghic în A, cu $AB=4$ și măsura unghiului C egală cu $45°$. Arătați că aria triunghiului ABC este egală cu 8.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ și $A(a)=\begin{pmatrix}a & a+3\\ -1 & 2\end{pmatrix}$, unde a este număr real.
5p	**a)** Arătați că $\det(A(2))=9$.
5p	**b)** Arătați că $A(a)+A(-a)=2A(0)$, pentru orice număr real a.
5p	**c)** Determinați numerele reale a pentru care $\det(A(a)\cdot A(-1)-aI_2)=0$.
	2. Se consideră polinomul $f=X^3+3X^2+mX-4$, unde m este număr real.
5p	**a)** Arătați că $f(0)=-4$, pentru orice număr real m.
5p	**b)** Determinați numărul real m, știind că -1 este rădăcină a polinomului f.
5p	**c)** Determinați numerele naturale m pentru care $x_1^2+x_2^2+x_3^2>5$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-3x+4+\ln x$.
5p	**a)** Arătați că $f'(x)=\frac{(2x-1)(x-1)}{x}$, $x\in(0,+\infty)$.
5p	**b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=1$, situat pe graficul funcției f.
5p	**c)** Demonstrați că $f(x)\leq\frac{11}{4}-\ln 2$, pentru orice $x\in(0,1]$.
	2. Se consideră funcția $f:\left(-\frac{3}{2},+\infty\right)\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x+\frac{6}{2x+3}$.
5p	**a)** Arătați că $\int_1^3\left(f(x)-\frac{6}{2x+3}\right)dx=e(e^2-1)$.
5p	**b)** Arătați că $\int_{-1}^0\left(f(x)-e^x\right)dx=3\ln 3$.
5p	**c)** Arătați că suprafața plană delimitată de graficul funcției $g:\left(-\frac{3}{2},+\infty\right)\to\mathbb{R}$, $g(x)=(2x^2+3x)f(x)$, axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=1$ are aria egală cu $2(e+1)$.

Examenul național de bacalaureat 2023
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 6

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$r=a_2-a_1=10$, unde r este rația progresiei aritmetice	**2p**
	$a_3=a_2+r=20+10=30$	**3p**
2.	$f(0)=4$	**2p**
	$f(1)=6 \Rightarrow f(0)+f(1)=4+6=10$	**3p**
3.	$x-4=4$	**3p**
	$x=8$, care convine	**2p**
4.	$\frac{20}{100}\cdot 80=16$ lei	**2p**
	Prețul după ieftinire este $80-16=64$ de lei	**3p**
5.	$MN=\sqrt{9+16}=$	**3p**
	$=\sqrt{25}=5$	**2p**
6.	$AC=4$	**3p**
	$\mathcal{A}_{\Delta ABC}=\frac{4\cdot 4}{2}=8$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(2)=\begin{pmatrix}2 & 5\\ -1 & 2\end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(2))=\begin{vmatrix}2 & 5\\ -1 & 2\end{vmatrix}=2\cdot 2-5\cdot(-1)=$	**3p**
	$=4+5=9$	**2p**
b)	$A(a)+A(-a)=\begin{pmatrix}a & a+3\\ -1 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-a & -a+3\\ -1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 6\\ -2 & 4\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=2\begin{pmatrix}0 & 3\\ -1 & 2\end{pmatrix}=2A(0)$, pentru orice număr real a	**2p**
c)	$A(a)\cdot A(-1)=\begin{pmatrix}-2a-3 & 4a+6\\ -1 & 2\end{pmatrix} \Rightarrow A(a)\cdot A(-1)-aI_2=\begin{pmatrix}-3a-3 & 4a+6\\ -1 & 2-a\end{pmatrix}$, de unde obținem $\det(A(a)\cdot A(-1)-aI_2)=3a^2+a$, pentru orice număr real a	**3p**
	$3a^2+a=0$, de unde obținem $a=-\frac{1}{3}$ sau $a=0$	**2p**
2.a)	$f(0)=0^3+3\cdot 0^2+m\cdot 0-4=$	**3p**
	$=0+0+0-4=-4$, pentru orice număr real m	**2p**
b)	$f(-1)=-m-2$, pentru orice număr real m	**2p**
	$f(-1)=0$, de unde obținem $m=-2$	**3p**

c)	$x_1+x_2+x_3=-3$, $x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=m$, $x_1^2+x_2^2+x_3^2=9-2m$, pentru orice număr natural m	**3p**
	$9-2m>5$ și, cum m este număr natural, obținem $m=0$ sau $m=1$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=2x-3+\frac{1}{x}=$	**3p**
	$=\frac{2x^2-3x+1}{x}=\frac{(2x-1)(x-1)}{x}$, $x\in(0,+\infty)$	**2p**
b)	$f(1)=2$, $f'(1)=0$	**2p**
	Ecuația tangentei este $y-f(1)=f'(1)(x-1)$, adică $y=2$	**3p**
c)	$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$ sau $x=1$; $f'(x)\ge 0$, pentru orice $x\in\left(0,\frac{1}{2}\right] \Rightarrow f$ este crescătoare pe $\left(0,\frac{1}{2}\right]$ și $f'(x)\le 0$, pentru orice $x\in\left[\frac{1}{2},1\right] \Rightarrow f$ este descrescătoare pe $\left[\frac{1}{2},1\right]$	**3p**
	$f(x)\le f\left(\frac{1}{2}\right)$, pentru orice $x\in(0,1]$ și, cum $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{11}{4}-\ln 2$, obținem $f(x)\le\frac{11}{4}-\ln 2$, pentru orice $x\in(0,1]$	**2p**
2.a)	$\int_1^3\left(f(x)-\frac{6}{2x+3}\right)dx=\int_1^3 e^x\,dx=e^x\Big\|_1^3=$	**3p**
	$=e^3-e=e\left(e^2-1\right)$	**2p**
b)	$\int_{-1}^0\left(f(x)-e^x\right)dx=\int_{-1}^0\frac{6}{2x+3}dx=3\int_{-1}^0\frac{(2x+3)'}{2x+3}dx=3\ln(2x+3)\Big\|_{-1}^0=$	**3p**
	$=3(\ln 3-\ln 1)=3\ln 3$	**2p**
c)	$g(x)=\left(2x^2+3x\right)e^x+6x$, $x\in\left(-\frac{3}{2},+\infty\right)$, deci $\mathcal{A}=\int_0^1\|g(x)\|dx=\int_0^1\left(\left(2x^2+3x\right)e^x+6x\right)dx=$ $=\left(2x^2+3x\right)e^x\Big\|_0^1-(4x+3)e^x\Big\|_0^1+4e^x\Big\|_0^1+3x^2\Big\|_0^1=$	**3p**
	$=5e-7e+3+4e-4+3=2e+2=2(e+1)$	**2p**