

Examenul național de bacalaureat 2024

Proba E. c)

Matematică $M_{\text{mate-info}}$

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Arătați că $\left(3 + \lg \frac{1}{10}\right) \cdot \lg \sqrt{10} = 1$.
- 5p 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + ax - 1$, unde a este număr real. Determinați numerele reale a pentru care $(f \circ f)(1) = 1$.
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2^{x+1} \cdot 8^x = 32$.
- 5p 4. Determinați probabilitatea ca, alegând un număr n din mulțimea numerelor naturale de două cifre, numărul $\sqrt{n+100}$ să fie natural.
- 5p 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,4)$, $B(4,6)$ și $C(4,2)$. Determinați coordonatele punctului D , știind că $\overline{OD} = \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{AC})$.
- 5p 6. Se consideră expresia $E(x) = \operatorname{tg} x - 4 \cos \frac{x}{2} \cdot \cos x$, unde $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Arătați că $E\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricele $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $A(x) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & x \\ -1 & 0 & 0 \\ x & 0 & -1 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
- 5p a) Arătați că $\det(A(0)) = 1$.
- 5p b) Arătați că $\det(A(x) \cdot A(x) - I_3) \leq 0$, pentru orice număr real x .
- 5p c) Se consideră matricea $B \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Determinați matricea $X \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ pentru care $X \cdot (A(0))^{-1} = B \cdot A(0)$, unde $(A(0))^{-1}$ este inversa matricei $A(0)$.
2. Pe mulțimea $M = [0, +\infty)$ se definește legea de compoziție $x * y = \frac{x^2 + y^2 + x + y}{x + y + 1}$.
- 5p a) Arătați că $1 * 2 = 2$.
- 5p b) Arătați că $e = 0$ este elementul neutru al legii de compoziție „*”.
- 5p c) Determinați perechile (m, n) de numere naturale pentru care $m * n = 5$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x+6)\sqrt{x^2+4}$.
- 5p a) Arătați că $f'(x) = \frac{2(x^2+3x+2)}{\sqrt{x^2+4}}$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p b) Determinați intervalele de monotonie a funcției f .
- 5p c) Demonstrați că ecuația $f(x) = m$ are soluție unică, pentru orice număr întreg m .

2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x+1}{e^x}$.

5p a) Arătați că $\int_0^4 e^x f(x) dx = 12$.

5p b) Arătați că $\int_0^1 f(x) dx = \frac{2e-3}{e}$.

5p c) Pentru fiecare număr natural n , $n \geq 2$, se consideră numărul $I_n = \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{f(x^n)} dx$. Demonstrați că

$$\frac{\ln 2}{n} \leq I_n \leq \frac{e-1}{n}, \text{ pentru orice număr natural } n, n \geq 2.$$

Examenul național de bacalaureat 2024
Proba E. c)
Matematică $M_{\text{mate-info}}$
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$\left(3 + \lg \frac{1}{10}\right) \cdot \lg \sqrt{10} = 2 \cdot \lg \sqrt{10} =$ $= 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$	3p 2p
2.	$f(1) = a, (f \circ f)(1) = 2a^2 - 1$ $2a^2 - 1 = 1$, de unde obținem $a = -1$ sau $a = 1$	2p 3p
3.	$2^{x+1} \cdot 2^{3x} = 32$, deci $2^{4x+1} = 2^5$, de unde obținem $4x + 1 = 5$ $x = 1$	3p 2p
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile Cum $110 \leq n + 100 \leq 199$ și $n + 100$ este pătratul unui număr natural, obținem 4 numere: 21, 44, 69 și 96, deci $p = \frac{4}{90} = \frac{2}{45}$	2p 3p
5.	$\overrightarrow{OD} = \frac{1}{2}(3\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{i} - 2\vec{j}) = 3\vec{i}$ Coordonatele punctului D sunt $x_D = 3$ și $y_D = 0$	3p 2p
6.	$\operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}, \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ $E\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3} - 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \sqrt{3} - \sqrt{3} = 0$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$A(0) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(0)) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} =$ $= 0 + 0 + 0 - 0 - 0 - (-1) = 1$	2p 3p
b)	$A(x) \cdot A(x) = \begin{pmatrix} 2+x^2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -x \\ 0 & -x & x^2+1 \end{pmatrix}, A(x) \cdot A(x) - I_3 = \begin{pmatrix} 1+x^2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -x \\ 0 & -x & x^2 \end{pmatrix}$ $\det(A(x) \cdot A(x) - I_3) = -x^2(1+x^2) - x^2 = -x^2(2+x^2) \leq 0$, pentru orice număr real x	3p 2p
c)	$X = B \cdot A(0) \cdot A(0)$ $X = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	2p 3p

2.a)	$1 * 2 = \frac{1^2 + 2^2 + 1 + 2}{1 + 2 + 1} =$ $= \frac{8}{4} = 2$	3p 2p
b)	$x * 0 = \frac{x^2 + 0^2 + x + 0}{x + 0 + 1} = \frac{x(x+1)}{x+1} = x$, pentru orice $x \in M$ $0 * x = \frac{0^2 + x^2 + 0 + x}{0 + x + 1} = \frac{x(x+1)}{x+1} = x$, pentru orice $x \in M$, deci $e = 0$ este elementul neutru al legii de compoziție „*”	2p 3p
c)	$\frac{m^2 + n^2 + m + n}{m + n + 1} = 5$, de unde obținem $(m-2)^2 + (n-2)^2 = 13$ Cum m și n sunt numere naturale, obținem perechile $(0,5)$, $(4,5)$, $(5,0)$ și $(5,4)$	3p 2p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = \sqrt{x^2 + 4} + (x+6) \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 4}} =$ $= \frac{2x^2 + 6x + 4}{\sqrt{x^2 + 4}} = \frac{2(x^2 + 3x + 2)}{\sqrt{x^2 + 4}}$, $x \in \mathbb{R}$	3p 2p
b)	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2$ sau $x = -1$ $f'(x) \geq 0$, pentru orice $x \in (-\infty, -2] \Rightarrow f$ este crescătoare pe $(-\infty, -2]$, $f'(x) \leq 0$, pentru orice $x \in [-2, -1] \Rightarrow f$ este descrescătoare pe $[-2, -1]$ și $f'(x) \geq 0$, pentru orice $x \in [-1, +\infty) \Rightarrow f$ este crescătoare pe $[-1, +\infty)$	2p 3p
c)	$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, $f(-2) = \sqrt{128}$, $f(-1) = \sqrt{125}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, f este continuă și $11 < \sqrt{125} < \sqrt{128} < 12$ Cum f este strict crescătoare pe $(-\infty, -2)$, f este descrescătoare pe $[-2, -1]$ și f este strict crescătoare pe $(-1, +\infty)$, obținem că ecuația $f(x) = m$ are soluție unică, pentru orice număr întreg m	3p 2p
2.a)	$\int_0^4 e^x f(x) dx = \int_0^4 (x+1) dx = \left(\frac{x^2}{2} + x \right) \Big _0^4 =$ $= 8 + 4 = 12$	3p 2p
b)	$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (x+1)(-e^{-x})' dx = (x+1)(-e^{-x}) \Big _0^1 - e^{-x} \Big _0^1 =$ $= -\frac{2}{e} + 1 - \frac{1}{e} + 1 = \frac{2e-3}{e}$	3p 2p
c)	$I_n = \int_0^1 \frac{x^{n-1} e^{x^n}}{x^n + 1} dx = \frac{1}{n} \int_0^1 \frac{(x^n)' e^{x^n}}{x^n + 1} dx = \frac{1}{n} \int_0^1 \frac{e^t}{t+1} dt$, pentru orice număr natural n , $n \geq 2$ $I_n \geq \frac{1}{n} \int_0^1 \frac{1}{t+1} dt = \frac{1}{n} \ln(t+1) \Big _0^1 = \frac{\ln 2}{n}$, pentru orice număr natural nenul n , $n \geq 2$ și $I_n \leq \frac{1}{n} \int_0^1 e^t dt = \frac{e-1}{n}$, pentru orice număr natural nenul n , $n \geq 2$	3p 2p