Examenul de bacalaureat național 2013
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Varianta 4

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Arătați că numărul $x=3(1-i)+3i$ este real.

5p **2.** Calculați distanța dintre punctele de intersecție a graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2-3x+2$ cu axa Ox.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2^{2x+3}=8$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând la întâmplare un element din mulțimea $A=\{1,2,3,...,20\}$, acesta să fie divizibil cu 4.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-2,3)$, $B(3,0)$ și $C(2,5)$. Calculați lungimea medianei din B a triunghiului ABC.

5p **6.** Determinați lungimea laturii AC a triunghiului ABC, știind că $BC=4$, $B=\frac{\pi}{6}$ și $C=\frac{\pi}{3}$

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Pentru fiecare număr real x se consideră matricea $M(x)=\begin{pmatrix} x & 1-x \\ 1-x & x \end{pmatrix}$.

5p **a)** Calculați $\det(M(2))$.

5p **b)** Verificați dacă $M(x)\cdot M(y)=M(2xy-x-y+1)$, pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Determinați numărul real a astfel încât $M(a)\cdot M(x)=M(a)$, pentru orice număr real x.

2. Pe $\mathbb{R}$ se definește legea de compoziție asociativă dată de $x\circ y=xy+2x+2y+2$.

5p **a)** Calculați $0\circ(-2)$.

5p **b)** Arătați că $x\circ y=(x+2)(y+2)-2$, pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $x\circ x\circ x=6$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2-2x+2}{x-1}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$, pentru orice $x\in(1,+\infty)$.

5p **b)** Determinați punctele de extrem ale funcției f.

5p **c)** Determinați ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcției f.

2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\sqrt{x}$.

5p **a)** Calculați $\int_1^2 \frac{f(x)}{\sqrt{x}}dx$.

5p **b)** Arătați că funcția $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}$ este o primitivă a funcției f.

5p **c)** Calculați aria suprafeței plane delimitate de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuație $x=1$ și $x=4$.

Arătați că $x = 3(1-i)+3i$ este real VM3 I/1

E1) $x = 3 - \cancel{3i} + \cancel{3i}$

$x = 3 \in \mathbb{R}$ deoarece nu are parte cu i

V123

Calculați distanța dintre punctele de intersecție ale G_f cu Ox unde $f(x) = x^2 - 3x + 2$ I/2

$E_1)$ $G_f \cap Ox$: $y = 0 \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0$

$E_2)$ $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1}$

$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2}$ $\begin{cases} \frac{4}{2} = 2 \Rightarrow A(2;0) \\ \frac{2}{2} = 1 \Rightarrow B(1;0) \end{cases}$

$E_3)$ dist între A și B $\Rightarrow AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

$\Rightarrow AB = \sqrt{(1-2)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{(-1)^2 + 0^2} = \sqrt{1} = 1$

V/123
I/3

Rezolvați în $\mathbb{R}$:

$$2^{2x+3}=8$$

E₁) Deoarece $8=2^3 \Rightarrow$ ec. devine

$$2^{2x+3}=2^3 \Rightarrow 2x+\cancel{3}=\cancel{3} \Rightarrow 2x=0$$

$$\Rightarrow x=0$$

V123
I/4

Calculați probabilitatea ca alegând un element din $A=\{1;2;3;...;20\}$, acesta să fie divizibil cu 4

$E_1)$ $P = \dfrac{\text{nr. caz favorabile}}{\text{nr. caz posibile}}$

$E_2)$ nr. de caz posibile: câte nr. sunt în mulțimea

$A=\{1;2;...;20\} \rightarrow 20$ numere

$E_3)$ nr. caz favorabile: câte nr. sunt $\vdots 4$ din A

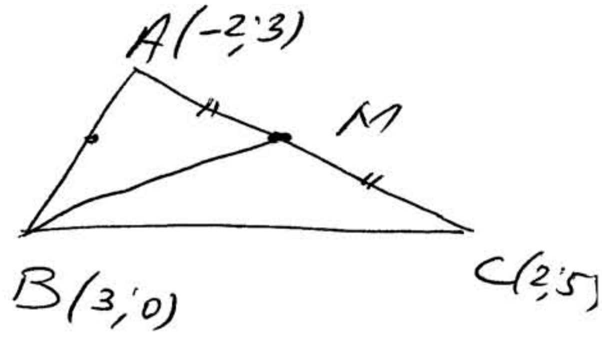
$\Rightarrow$ sunt $\vdots 4$ numerele $\{4;8;12;16;20\}$

$\Rightarrow 5$ numere

$E_4)$ $P = \dfrac{5}{20} = \dfrac{1}{4}$

V123 I 5

Fie $A(-2;3)$, $B(3;0)$, $C(2;5)$. Calculați lungimea medianei din B



E_1) BM mediană $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ M mijl lui AC

$$\Rightarrow \begin{cases} x_M = \dfrac{x_A + x_C}{2} \Rightarrow x_M = \dfrac{-2+2}{2} = 0 \\ y_M = \dfrac{y_A + y_C}{2} \Rightarrow y_M = \dfrac{3+5}{2} = 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow M(0;4)$$

E_2) $A(-2;3)$, $M(0;4) \Rightarrow$ lung lui AM este

$$AM = \sqrt{(x_M - x_A)^2 + (y_M - y_A)^2} =$$

$$= \sqrt{(0+2)^2 + (4-3)^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$$

V123
I/6

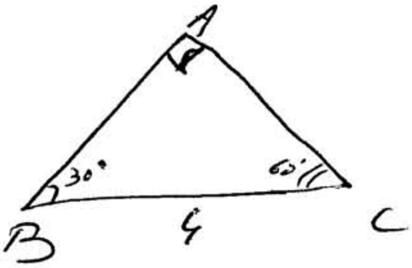
Determinați lungimea lui AC dacă

$BC = 4$, $B = \frac{\pi}{6}$, $C = \frac{\pi}{3}$

$E_1)$ $B = \frac{\pi}{6} = \frac{180^\circ}{6} = 30^\circ$

$C = \frac{\pi}{3} = \frac{180^\circ}{3} = 60^\circ$

$E_2)$ $A + B + C = 180^\circ \Rightarrow A + 30^\circ + 60^\circ = 180^\circ \Rightarrow A = 90^\circ$



$E_3)$ $\sin B = \frac{\text{cat op}}{\text{ip}}$

$\Rightarrow \sin 30^\circ = \frac{AC}{4} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{AC}{4} \Rightarrow AC = \frac{1 \cdot 4}{2} \Rightarrow AC = 2$

V123

II 1a)

Fie $M(x)=\begin{pmatrix} x & 1-x \\ 1-x & x \end{pmatrix}$

Calculați $\det M(2)$

$E_1)$ $M(2)=\begin{pmatrix} 2 & 1-2 \\ 1-2 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

$E_2)$ $\det M(2)=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=4-(-1)\cdot(-1)$
$=4-1=3$

Fie $M(x) = \begin{pmatrix} x & 1-x \\ 1-x & x \end{pmatrix}$. Verificați că V123

II 1.a)

$M(x) \cdot M(y) = M(2xy - x - y + 1), \ \forall x, y \in \mathbb{R}$

$E_1)$ $M(x) \cdot M(y) = \begin{pmatrix} x & 1-x \\ 1-x & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y & 1-y \\ 1-y & y \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} xy + (1-x)(1-y) & x(1-y) + (1-x)y \\ (1-x)y + x(1-y) & (1-x)(1-y) + xy \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} xy + 1 - x - y + xy & x - xy + y - xy \\ y - xy + x - xy & 1 - x - y + xy + xy \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2xy + 1 - x - y & x + y - 2xy \\ x + y - 2xy & 2xy - x - y + 1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$E_2)$ $M(2xy - x - y + 1) = \begin{pmatrix} 2xy - x - y + 1 & 1 - (2xy - x - y + 1) \\ 1 - (2xy - x - y + 1) & 2xy - x - y + 1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 2xy - x - y + 1 & \cancel{1} - 2xy + x + y - \cancel{1} \\ \cancel{1} - 2xy + x + y - \cancel{1} & 2xy - x - y + 1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

Din (1) și (2) $\Rightarrow$ egalitate

V123
II 1c)

Fie $M(x)=\begin{pmatrix} x & 1-x \\ 1-x & x \end{pmatrix}$, se știe că

$$M(x)\cdot M(y)=M(2xy-x-y+1)$$

Determinați a astfel încât

$$M(a)M(x)=M(a),\ \forall x\in\mathbb{R}$$

E1) Din $M(x)\cdot M(y)=M(2xy-x-y+1)$

$$\Rightarrow M(a)M(x)=M(2ax-a-x+1)$$

E2) Așadar, trebuie găsit a pentru care

$$M(2ax-a-x+1)=M(a)$$

$$\Leftrightarrow 2ax-a-x+1=a$$

$$\Leftrightarrow 2ax-2a=x-1$$

$$\Leftrightarrow 2a(x-1)=x-1,\ \forall x\in\mathbb{R}$$

E3) $\Rightarrow 2a=1\Rightarrow a=\frac{1}{2}$

Fie $x \circ y = xy + 2x + 2y + 2$ V/123

Calculați $0 \circ (-2)$ II 2a)

E1) $0 \circ (-2) = 0 \cdot (-2) + 2 \cdot 0 + 2 \cdot (-2) + 2$

$= 0 + 0 - 4 + 2 = -2$

V/123
II 2 b1

Fie $x \circ y = xy + 2x + 2y + 2$

Arătați că $x \circ y = (x+2)(y+2) - 2$

E1) $x \circ y = (x+2)(y+2) - 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x \circ y = xy + 2x + 2y + 4 - 2$

$\Rightarrow x \circ y = xy + 2x + 2y + 2$

V/123

Fie $x \circ y = xy + 2x + 2y + 2$, rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația: $x \circ x \circ x = 6$ II. c)

$E_1)$ $x \circ x = x^2 + 2x + 2x + 2$

$= x^2 + 4x + 2$

$E_2)$ $x \circ x \circ x = (x^2 + 4x + 2) \circ x =$

$= (x^2 + 4x + 2)x + 2(x^2 + 4x + 2) + 2x + 2$

$= x^3 + 4x^2 + 2x + 2x^2 + 8x + 4 + 2x + 2$

$= x^3 + 6x^2 + 12x + 6$

$E_3)$ ec. este $x^3 + 6x^2 + 12x + \cancel{6} = \cancel{6}$

$\Leftrightarrow x(x^2 + 6x + 12) = 0$

$\Rightarrow$ $x = 0$ sau $x^2 + 6x + 12 = 0$

$\Delta = 36 - 48 < 0 \Rightarrow x_{1,2} \notin \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ soluția $x = 0$

Fie $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$

Arătați că $f'(x) = \dfrac{x(x-2)}{(x-1)^2}$

$E_1)$ $f'(x) = \left(\dfrac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}\right)' =$

$$= \frac{(x^2 - 2x + 2)'(x-1) - (x^2 - 2x + 2)(x-1)'}{(x-1)^2}$$

$E_2)$ $f'(x) = \dfrac{(2x-2)(x-1) - (x^2 - 2x + 2) \cdot 1}{(x-1)^2}$

$$f'(x) = \frac{2x^2 - \cancel{2x} - 2x + \cancel{2} - x^2 + \cancel{2x} - \cancel{2}}{(x-1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$$

Fie $f(x)=\dfrac{x^2-2x+2}{x-1}$, $f:(1;\infty)\to\mathbb{R}$, V123 III 1b)

determinați punctele de extrem ale lui f

E1) $f'(x)=\left(\dfrac{x^2-2x+2}{x-1}\right)'=\dfrac{(x^2-2x+2)'(x-1)-(x^2-2x+2)(x-1)'}{(x-1)^2}$

$$=\frac{(2x-2)(x-1)-(x^2-2x+2)\cdot 1}{(x-1)^2}=$$

$$=\frac{2x^2-2x-\cancel{2x}+\cancel{2}-x^2+\cancel{2x}-\cancel{2}}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}$$

E2) $f'(x)=0 \Rightarrow x^2-2x=0 \Rightarrow x(x-2)=0$ $\Rightarrow$ $x=0$ sau $x=2$

E3)

x	$(1$		2		
f'	$-$	$-\ -$	0	$+$	$+\ +$
f	$\searrow$			$\nearrow$	

Pt a găsi semnul lui $f'(x)$, dăm valori

$\Rightarrow f'\left(\frac{3}{2}\right)=\dfrac{\frac{3}{2}-2}{\left(\frac{3}{2}-1\right)^2}=\dfrac{-\frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}<0\Rightarrow f'(x)<0$

pe $(1;2)\Rightarrow f_s\searrow$ pe $(1;2)$

$f'(3)=\dfrac{3-2}{(3-1)^2}>0\Rightarrow f'(x)>0$ pe $(2;\infty)\Rightarrow f_s\nearrow(2;\infty)$

$\Rightarrow x=2$ pct de minim

$\frac{V123}{III\ 10)}$

Fie $f:(1;\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{x^2-2x+2}{x-1}$

Găsiți ec. asimpt oblice spre ∞ a G_f

$E_1)$ <u>as. orizontală</u>:

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2x+2}{x-1}\overset{gr\,P>gr\,Q}{=\!=\!=}$$

$$=\operatorname{sgn}\left(\frac{1}{1}\right)\cdot\infty=\infty$$

$\Rightarrow G_f$ nu are as. oriz spre ∞

$E_2)$ <u>as. oblică</u>:

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2-2x+2}{x-1}}{x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2x+2}{(x-1)\cdot x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2x+2}{x^2-x}\overset{gr\,P=gr\,Q}{=\!=\!=}1\in\mathbb{R}$$

$$n=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-2x+2}{x-1}-\overset{x-1)}{x}\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x^2}-2x+2-\cancel{x^2}+x}{x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{-x+2}{x-1}\overset{gr\,P=gr\,Q}{=\!=\!=}$$

$$=-1\in\mathbb{R}$$

$E_3)$ as. oblică: $y=mx+n$

$$\Rightarrow y=x-1$$

V123
II 2a)

Fie $f:(0;\infty)\to\mathbb{R}$ $f(x)=x\sqrt{x}$

Calculați $\int_1^2 \frac{f(x)}{\sqrt{x}}\,dx$

$E_1)$ $I=\int_1^2 \frac{x\cancel{\sqrt{x}}}{\cancel{\sqrt{x}}}\,dx=\int_1^2 x\,dx \Rightarrow$

$E_2)$ $I=\frac{x^2}{2}\Big|_1^2=\frac{1}{2}(4-1)=\frac{3}{2}$

V1C3

Fie $f(x)=x\sqrt{x}$, arătați că funcția II 2b)

$F(x)=\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}$ este o primitivă pt f

$E_1)$ F primit pt $f \Leftrightarrow \begin{cases} F \text{ derivabilă și} \\ F'(x)=f(x) \end{cases}$

$E_2)$ $F(x)=\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}$ e derivabilă

$E_3)$ $F'(x)=\left(\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}\right)'=\frac{2}{5}\left(x^2\sqrt{x}\right)'=$

$=\frac{2}{5}\left((x^2)'\sqrt{x}+x^2(\sqrt{x})'\right)=$

$=\frac{2}{5}\left({}^{2\sqrt{x})}2x\sqrt{x}+x^2\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)=$

$=\frac{\cancel{2}}{5}\cdot\frac{4x\cdot\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}+x^2}{\cancel{2}\sqrt{x}}=\frac{\cancel{5}x^2}{\cancel{5}\sqrt{x}}$

$E_4)$ $F'(x)=\frac{{}^{\sqrt{x})}x^2}{\sqrt{x}}=\frac{{}^{x}\cancel{x^2}\sqrt{x}}{\cancel{x}}=x\sqrt{x}$

V123
III 2c)

Fie $f:(0;\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\sqrt{x}$. Se știe că $F(x)=\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}$ este o primitivă a f, calculați aria dintre G_f, axa Ox și dreptele $x=1$ și $x=4$

$E_1)$ $A=\int_1^4 |f(x)|\,dx=\int_1^4 |x\sqrt{x}|\,dx$

$E_2)$ $x\in[1;4]\Rightarrow x\geq 0\Rightarrow x\sqrt{x}\geq 0$

$\Rightarrow A=\int_1^4 x\sqrt{x}\,dx$

$E_3)$ Dar, F primit. a $f\Rightarrow\int f(x)\,dx=F(x)+C$

$\Rightarrow A=\int_1^4 x\sqrt{x}\,dx=\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}\Big|_1^4=$

$=\frac{2}{5}\left(4^2\sqrt{4}-1^2\sqrt{1}\right)=\frac{2}{5}(32-1)=$

$=\frac{2}{5}\cdot 31=\frac{62}{5}$