Examenul de bacalaureat naţional 2014
Proba E. c) – 2 iulie 2014
Matematică *M_mate-info*

VARA, 2014

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p 1. Calculaţi suma primilor trei termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n\ge1}$ ştiind că $a_1=6$ şi $a_2=12$.

5p 2. Determinaţi coordonatele vârfului parabolei asociate funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+2x+4$.

5p 3. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $(3^x-1)(3^x-3)=0$.

5p 4. Calculaţi probabilitatea ca alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre, acesta să conţină cifra 1.

5p 5. Se consideră triunghiul echilateral ABC cu $AB=2$. Calculaţi lungimea vectorului $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$.

5p 6. Calculaţi aria triunghiului isoscel ABC ştiind că $A=\frac{\pi}{2}$ şi $AC=4$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}2 & a & a\\ a & 2 & 2\\ a & a & 2\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătaţi că $\det(A(0))=8$.

5p **b)** Determinaţi numerele reale a pentru care $\det(A(a))=0$.

5p **c)** Determinaţi matricea $X=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$ ştiind că $A(1)\cdot X=\begin{pmatrix}4\\ 5\\ 4\end{pmatrix}$.

2. Se consideră x_1, x_2, x_3 rădăcinile polinomului $f=X^3-2X^2+3X+m$, unde m este număr real.

5p **a)** Calculaţi $f(1)$.

5p **b)** Arătaţi că $x_1^2+x_2^2+x_3^2=-2$.

5p **c)** Determinaţi numărul real m ştiind că $x_1^3+x_2^3+x_3^3=8$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{\ln x}{x}$.

5p **a)** Arătaţi că $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Determinaţi ecuaţia asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.

5p **c)** Arătaţi că $f(x)\le\frac{1}{e}$ pentru orice $x\in(0,+\infty)$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+x+1$.

5p **a)** Arătaţi că $\int_0^1 f(x)\,dx=\frac{11}{6}$.

5p **b)** Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n=\int_0^1\frac{x^n}{f(x)}dx$. Arătaţi că $I_{n+1}\le I_n$ pentru orice număr natural nenul n.

5p **c)** Determinaţi numărul real pozitiv a ştiind că $\int_0^a\frac{2x+1}{f(x)}dx=\ln 3$.

Calculați $S_3 = ?$ dacă a_n progr aritmetică cu $a_1 = 6$ și $a_2 = 12$

E1) $a_n = a_1 + (n-1)r$

$\Rightarrow a_2 = a_1 + r$

E2) înlocuim $\Rightarrow 12 = 6 + r \Rightarrow r = 6$

E3) $S_n = \dfrac{(a_1 + a_n)\cdot n}{2}$

$\Rightarrow S_3 = \dfrac{(a_1 + a_3)\cdot 3}{2}$

E4) $a_3 = a_1 + 2r \Rightarrow a_3 = 6 + 2\cdot 6$

$\Rightarrow a_3 = 18$

E5) $S_3 = \dfrac{(6+18)\cdot 3}{2} = \dfrac{\overset{12}{\cancel{24}}\cdot 3}{\cancel{2}} = 12\cdot 3$

$\Rightarrow S_3 = 36$

Găsiți coordonatele vârfului parabolei asociate lui $f(x)=x^2+2x+4$

E1) $V\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$

E2) $x_V = -\frac{b}{2a} \Rightarrow x_V = -\frac{2}{2\cdot 1} = -1$

E3) $y_V = -\frac{\Delta}{4a} \Rightarrow y_V = -\frac{2^2-4\cdot 1\cdot 4}{4\cdot 1}$

$\Rightarrow y_V = -\frac{-12}{4} \Rightarrow y_V = 3$

E4) $V(-1; 3)$

Rezolvați în $\mathbb{R}$:

$$(3^x-1)(3^x-3)=0$$

E1) $(3^x-1)(3^x-3)=0$

$\Rightarrow$ $3^x-1=0 \Rightarrow 3^x=1 \Rightarrow x=0$

sau

$3^x-3=0 \Rightarrow 3^x=3 \Rightarrow x=1$

E2) $x \in \{0;1\}$

Calculați probabilitatea ca alegând un număr natural de două cifre, acesta să conțină cifra 1 V125

E1) $P = \dfrac{\text{nr. caz favorabile}}{\text{nr. caz posibile}}$

E2) <u>nr. caz posibile</u>: aleg $\overline{ab}$

cu $a \to 9v$

$b \to 10v$

$\underline{\text{independ}}$

$\Rightarrow 9 \cdot 10 = 90$ numere

E3) <u>nr. caz favorabile</u>: $\overline{ab}$ cu a sau b să fie cifra 1 (pot și a și b să fie cifra 1)

<u>Caz I</u>: $a = 1 \Rightarrow b \to 10$ variante (inclusiv numărul 11) $\Rightarrow$ 10 numere

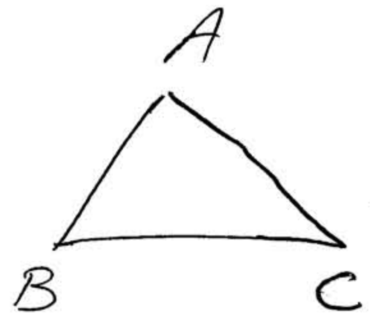
<u>Caz II</u>: $a \neq 1 \Rightarrow a \to 8$ variante $\Rightarrow$ obligatoriu $b = 1 \to 8$ numere

E4) cazuri $\Rightarrow$ le adun $\Rightarrow 10 + 8 = 18$ numere

E5) $P = \dfrac{\cancel{18}^{\,1}}{\cancel{90}_{\,5}} = \dfrac{1}{5}$

Fie ΔABC echilateral cu $AB=2$.

Calculați $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}|$



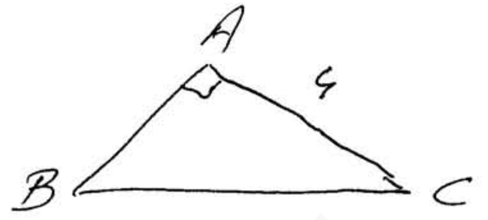
E1) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$

(regula Δ)

E2) $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}|=|\overrightarrow{AC}|=2$

Calculați aria Δ isoscel ABC dacă

$A = \frac{\pi}{2}$ și $AC = 4$



E1) $A = \frac{\pi}{2} \Rightarrow A = 90^\circ$

E2) Δ isoscel cu $AB \equiv AC$

E3) $\mathcal{A}_{ABC} = \frac{AB \cdot AC \cdot \sin \hat{A}}{2}$

$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{4 \cdot 4 \cdot \sin 90^\circ}{2} = \frac{16 \cdot 1}{2} = 8$

V 126
II 1a)

Fie $A(a)=\begin{pmatrix} 2 & a & a \\ a & 2 & 2 \\ a & a & 2 \end{pmatrix}$

Arătați că $\det(A(0))=8$

E_1) $\det A(0)=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}=8+0+0-0-0-0$
$=8$

Fie $A(a)=\begin{pmatrix} 2 & a & a \\ a & 2 & 2 \\ a & a & 2 \end{pmatrix}$, găsiți $a\in\mathbb{R}$

dacă $\det(A(a))=0$

$E_1)$ $\det(A(a))=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2 & a & a \\ a & 2 & 2 \\ a & a & 2 \end{vmatrix}=0$

$\Leftrightarrow 8+\cancel{2a^2}+a^3-\cancel{2a^2}-4a-2a^2=0$

$\Leftrightarrow a^3-2a^2-4a+8=0$

$E_2)$ $D_8=\{\pm 1; \pm 2; \pm 4; \pm 8\}$

	a^3	a^2	a	a^0
	1	-2	-4	8
~~1~~	~~1~~	~~-1~~	~~-5~~	~~$\boxed{3}\neq 0$~~
2	1	0	-4	$\boxed{0}$ ok

$\Rightarrow (a-2)(1\cdot a^2+0\cdot a-4)=0$

$\Rightarrow \begin{cases} a-2=0 \Rightarrow a_1=2 \\ \text{sau} \\ a^2-4=0 \Rightarrow a^2=4 \Rightarrow a=\pm 2 \end{cases}$

$E_3)$ S_f: $a\in\{-2; 2\}$

Fie $A(a)=\begin{pmatrix} 2 & a & a \\ a & 2 & 2 \\ a & a & 2 \end{pmatrix}$, găsiți matricea $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ dacă $A(1)\cdot X=\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$

$E_1)$ $A(1)\cdot X=\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x+y+z=4 \\ x+2y+2z=5 \\ x+y+2z=4 \end{cases}$$

$E_2)$ $\det S=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}=8+\cancel{2}+1-\cancel{2}-4-2=$
$=3\neq 0 \Rightarrow$ Cramer

$E_3)$ $\Delta_x=\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}=16+\cancel{8}+5-\cancel{8}-8-10=$
$=3$

$\Delta_y=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}=8+\cancel{2}+1-\cancel{2}-4-2=3$

$\Delta_z=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}=16+5+\cancel{4}-8-10-\cancel{4}=$
$=21-18=3$

$E_4)$ $x=\dfrac{\Delta_x}{\det S}=\dfrac{3}{3}=1$, $y=\dfrac{\Delta_y}{\det S}=\dfrac{3}{3}=1$ și

$z=\dfrac{\Delta_z}{\det S}=\dfrac{3}{3}=1 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ z=1 \end{cases}$

Fie $f = X^3 - 2X^2 + 3X + m$, $m \in \mathbb{R}$

Calculați $f(1)$

E1) $f(1) = 1^3 - 2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + m$

$f(1) = 1 - 2 + 3 + m$

$f(1) = 2 + m$

Fie $f = X^3 - 2X^2 + 3X + m$ cu rădăcini x_1, x_2, x_3. Arătați că $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = -2$

$E_1)$ $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (s_1)^2 - 2s_2$

$E_2)$ $s_1 = -\frac{b}{a} = -\frac{-2}{1} = 2$

$s_2 = \frac{c}{a} = \frac{3}{1} = 3$

$E_3)$ $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 2^2 - 2 \cdot 3 = 4 - 6 = -2$

Fie $f = X^3 - 2X^2 + 3X + m$. Găsiți $m \in \mathbb{R}$ dacă $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 8$ unde x_1, x_2, x_3 sunt rădăcini

---

$E_1)$ x_1 răd $\Rightarrow x_1^3 - 2x_1^2 + 3x_1 + m = 0$

x_2 răd $\Rightarrow x_2^3 - 2\cdot x_2^2 + 3x_2 + m = 0$

x_3 răd $\Rightarrow x_3^3 - 2\cdot x_3^2 + 3x_3 + m = 0$

$"+" : (x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) - 2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 3(x_1 + x_2 + x_3) + 3m = 0$

$E_2)$ Dar, $x_1 + x_2 + x_3 = s_1 = -\frac{b}{a} = -\frac{-2}{1} = 2$

$E_3)$ $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (s_1)^2 - 2s_2 = 2^2 - 2\cdot 3 = -2$

$E_4)$ înlocuim în relația de la $E_1)$

$\Rightarrow x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 2\cdot(-2) + 3\cdot 2 + 3m = 0$

$\Rightarrow x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 4 + 6 + 3m = 0$

$\Rightarrow x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = -10 - 3m$

$E_5)$ ec. devine: $-10 - 3m = 8$

$\Rightarrow -3m = 18 \Rightarrow \boxed{m = -6}$

Fie $f:(0;\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{\ln x}{x}$ V126

Arătați că $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$ III 1a)

E1) $f'(x)=\left(\frac{\ln x}{x}\right)'=\frac{(\ln x)'\cdot x-(\ln x)\cdot(x)'}{x^2}$

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{\cancel{x}}\cdot\cancel{x}-\ln x}{x^2}$$

$$f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$$

V126
III 1b)

Fie $f:(0;\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{\ln x}{x}$

Găsiți ec. asimpt spre ∞ la G_f

E1) <u>as. orizontală</u>

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}\ \underset{l'H}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\ln x)'}{x'}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}\overset{\frac{1}{\infty}}{=}0$$

E2) $\Rightarrow$ $y=0$ as. oriz spre ∞

E3) Deoarece G_f are as. oriz spre ∞

$\Rightarrow$ G_f nu are as. oblică spre ∞

Fie $f:(0;\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ V126 III 1(c)

Arătați că $f(x)\leq\dfrac{1}{e}$, $\forall x\in(0,\infty)$

$E_1)$ $f'(x)=\left(\dfrac{\ln x}{x}\right)'=\dfrac{(\ln x)'\cdot x-(\ln x)\cdot x'}{x^2}$

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{\cancel{x}}\cdot \cancel{x}-\ln x}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}$$

$E_2)$ $f'(x)=0\Rightarrow 1-\ln x=0\Rightarrow \ln x=1$

$\Rightarrow x=e^1\Rightarrow x=e$, $f(e)=\dfrac{\ln e}{e}=\dfrac{1}{e}$

$E_3)$

x	0		e	
f'		$+\ +\ +$	0	$-\ -\ -$
f		$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$

Pt a găsi semnul lui $f'(x)$, dăm valori

$$f'\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{1-\ln\frac{1}{e}}{\left(\frac{1}{e}\right)^2}=\frac{1-\ln e^{-1}}{\left(\frac{1}{e}\right)^2}=\frac{1+\ln e}{\left(\frac{1}{e}\right)^2}=$$

$$=\frac{2}{\left(\frac{1}{e}\right)^2}>0\Rightarrow f'(x)>0,\ \forall x\in(0;e)$$

$$f'(e^2)=\frac{1-\ln e^2}{e^2}=\frac{1-2\ln e}{e^2}=\frac{1-2}{e^2}<0\Rightarrow f'(x)<0$$ pe $(e;\infty)$

$E_4)\Rightarrow f_1\nearrow$ pe $(0,e)$, $f_1\searrow$ pe $(e,\infty)\Rightarrow f(x)\leq\dfrac{1}{e}$

V126

III 2a)

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+x+1$

Arătați că $\int_0^1 f(x)dx=\frac{11}{6}$

E,) $I=\int_0^1 (x^2+x+1)dx=$

$$=\frac{x^3}{3}\Big|_0^1+\frac{x^2}{2}\Big|_0^1+x\Big|_0^1=$$

$$=\left(\frac{1}{3}-0\right)+\left(\frac{1}{2}-0\right)+(1-0)$$

$$=\frac{^{2)}1}{3}+\frac{^{3)}1}{2}+{}^{6)}1=\frac{2+3+6}{6}=\frac{11}{6}$$

V126

III 2b)

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+x+1$.
Pentru fiecare număr natural nenul n,
fie $I_n=\int_0^1 \frac{x^n}{f(x)}dx$. Se cere $I_{n+1}\le I_n$

$E_1)$ $I_n=\int_0^1 \frac{x^n}{x^2+x+1}dx$

$E_2)$ $I_{n+1}-I_n=\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{x^2+x+1}dx-\int_0^1 \frac{x^n}{x^2+x+1}dx=$

$$=\int_0^1 \frac{x^n(x-1)}{x^2+x+1}dx$$

$E_3)$ Din $x\in[0;1]\Rightarrow\begin{cases} x^n\ge 0\\ x-1\le 0\\ x^2+x+1>0\end{cases}\Rightarrow\frac{x^n(x-1)}{x^2+x+1}\le 0$

$E_4)$ Deoarece $0<1$ (capetele integralei)

și $\frac{x^n(x-1)}{x^2+x+1}\le 0\Rightarrow\int_0^1 \frac{x^n(x-1)}{x^2+x+1}dx\le 0$

$$\Rightarrow I_{n+1}-I_n\le 0\Rightarrow I_{n+1}\le I_n$$

$\Rightarrow$ q.e.d.

V26

III 2 c)

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+x+1$.

Determinați numărul real pozitiv a dacă $\int_0^a \frac{2x+1}{f(x)}\,dx=\ln 3$

$E_1)$ $I=\int_0^a \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx \xlongequal{\text{gr}P=1,\ \text{gr}Q=2}$

$=\int_0^a \frac{(x^2+x+1)'}{x^2+x+1}\,dx=$

$=\ln|x^2+x+1|\Big|_0^a=\ln(a^2+a+1)-\underbrace{\ln 1}_{0}$

$E_2)$ $\left.\begin{array}{l} I=\ln(a^2+a+1) \\ \text{Dar, } I=\ln 3 \end{array}\right\}\Rightarrow a^2+a+1=3$

$\Rightarrow a^2+a-2=0 \Rightarrow a_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2\cdot 1}$

$a_{1,2}=\frac{-1\pm 3}{2} \begin{cases} \frac{2}{2}=1 \\ -\frac{4}{2}=-2 \end{cases}$

$E_3)$ se cere a pozitiv $\Rightarrow a=1$