Examenul de bacalaureat național 2014
Proba E. c) – 2 iulie 2014
Matematică *M_şt-nat*

Varianta 5

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p 1. Se consideră numărul complex $z = 2 + i$. Calculați z^2.

5p 2. Determinați numărul real m știind că punctul $M(m,1)$ aparține graficului funcției $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - 3$.

5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3(x-3) = 2$.

5p 4. Determinați numărul submulțimilor cu număr impar de elemente ale mulțimii $A = \{1, 2, 3, 4\}$.

5p 5. În dreptunghiul $ABCD$ se notează cu M mijlocul laturii AD. Arătați că $\overline{MB} + \overline{MC} = 2\overline{AB}$.

5p 6. Se consideră triunghiul ABC dreptunghic în A. Arătați că $\sin B \cdot \cos C + \sin C \cdot \cos B = 1$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 0 & 2014 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ și $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5p a) Calculați $\det A$.

5p b) Arătați că $A + A \cdot A = 2014 I_2$.

5p c) Rezolvați în $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ecuația matriceală $A \cdot X = 2014\, I_2$.

2. Se consideră polinomul $f = X^3 - 6X^2 + mX - 6$, unde m este număr real.

5p a) Calculați $f(0)$.

5p b) Arătați că $\dfrac{1}{x_1x_2} + \dfrac{1}{x_1x_3} + \dfrac{1}{x_2x_3} = 1$ știind că x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

5p c) Determinați numărul real m știind că rădăcinile polinomului f sunt trei numere întregi consecutive.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$.

5p a) Arătați că $f'(x) = \dfrac{(1-x)(1+x)}{\left(x^2+1\right)^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

5p b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0 = 1$, situat pe graficul funcției f.

5p c) Determinați punctele de extrem ale funcției f.

2. Se consideră funcția $f:(-1,+\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{x+2} + \dfrac{1}{x+3}$.

5p a) Arătați că $\displaystyle\int_0^1 \left(f(x) - \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3} \right) dx = \ln 2$.

5p b) Arătați că orice primitivă a funcției f este concavă pe intervalul $(-1,+\infty)$.

5p c) Arătați că suprafața plană delimitată de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x = 0$ și $x = n$, are aria mai mare sau egală cu $\ln 4$, pentru orice număr natural nenul n.

Fie $z = 2 + i$, calculați z^2

E,) $z^2 = (2+i)^2 = 4 + 4i + i^2 = 4 + 4i - 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow z^2 = 3 + 4i$

$m = ?$ dacă $M(m, 1) \in G_f$ unde

$f(x) = x - 3$

$E_1)$ Folosim $A \in G_f \Rightarrow f(x_A) = y_A$

$E_2)$ În cazul nostru, $M(m, 1) \in G_f$

$\Rightarrow f(m) = 1 \Rightarrow m - 3 = 1 \Rightarrow m = 4$

Rezolvați în $\mathbb{R}$:

$$\log_3(x-3)=2$$

$E_1)$ <u>Cond</u>.: $x-3>0 \Rightarrow x>3 \Rightarrow x\in(3;\infty)=I_c$

$E_2)$ Folosim $\log_b A=N \Leftrightarrow A=b^N$

În cazul nostru, $\log_3(x-3)=2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x-3=3^2 \Leftrightarrow x-3=9$$

$$\Rightarrow x=12\in I_c$$

$\Rightarrow x=12$ soluție

Găsiți numărul submulțimilor cu un număr impar de elemente din $A=\{1;2;3;4\}$

E_1) sunt cu 1 element; $\{1\};\{2\};\{3\};\{4\} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ 4 submulțimi

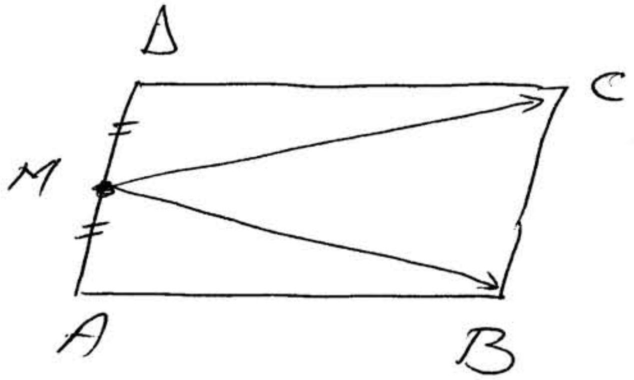
E_2) sunt cu 3 elemente; $\{1;2,3\};\{1;2;4\};\{1;3;4\};$

$\{2;3;4\} \Rightarrow$ 4 submulțimi

E_3) sunt cu nr impar de elemente $4+4=8$

Fie $ABCD$ dreptunghi, M mijl lui AD.

Se cere: $\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{AB}$



E_1) în $\Delta\, MDC \Rightarrow$

$\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DC}$

E_2) în $\Delta\, MAB \Rightarrow$

$\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}$

E_3) Adunând relațiile $\Rightarrow$

$$\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}$$

E_4) Dar, $\overrightarrow{MD}$ și $\overrightarrow{MA}$ sunt vectori opuși $\Rightarrow$

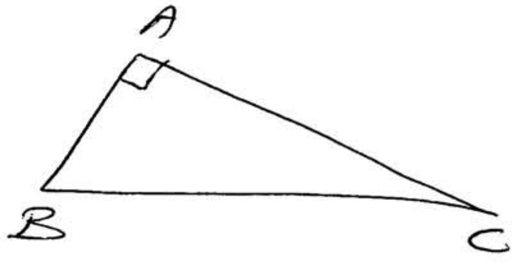
$\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{0}$

E_5) Dar, $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB} \Rightarrow$ înlocuim în E_3 și

avem: $\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{0}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AB}$

Fie $\triangle ABC$ cu $m(\hat{A})=90^\circ$. Arătați că:

$$\sin B \cdot \cos C + \sin C \cdot \cos B = 1$$



met I

E1) $\sin B = \frac{AC}{BC}$, $\cos C = \frac{AC}{BC}$,

$\sin C = \frac{AB}{BC}$, $\cos B = \frac{AB}{BC}$

E2) înlocuim $\Rightarrow$

$$\sin B \cdot \cos C + \sin C \cdot \cos B = \frac{AC}{BC} \cdot \frac{AC}{BC} + \frac{AB}{BC} \cdot \frac{AB}{BC} =$$

$$= \frac{AC^2}{BC^2} + \frac{AB^2}{BC^2} = \frac{AC^2 + AB^2}{BC^2} = \frac{BC^2}{BC^2} = 1,$$ s-a

folosit teorema lui Pitagora

met II

E1) $\sin B \cdot \cos C + \sin C \cdot \cos B =$

$$= \sin(B+C) = \sin(180^\circ - A) =$$

$$= \sin 180^\circ \cos A - \cos 180^\circ \sin A =$$

$$= 0 \cdot \cos A - (-1) \sin A = \sin A$$

Fie $A = \begin{pmatrix} 0 & 2014 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, calculați $\det A$

E1) $\det A = \begin{vmatrix} 0 & 2014 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 - 2014 = -2014$

Fie $A = \begin{pmatrix} 0 & 2014 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, calculați

$$A + A \cdot A$$

E1) $A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 2014 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2014 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2014 & -2014 \\ -1 & 2015 \end{pmatrix}$

E2) $A + A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 2014 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2014 & -2014 \\ -1 & 2015 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2014 & 0 \\ 0 & 2014 \end{pmatrix} =$

$$= 2014 \cdot I_2$$

Fie $A=\begin{pmatrix} 0 & 2014 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, rezolvați în $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ecuația $A\cdot X = 2014\cdot I_2$

E_1) $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \Rightarrow X=\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$

E_2) $A\cdot X = 2014\cdot I_2 \Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2014 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = 2014\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2014z & 2014t \\ x-z & y-t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2014 & 0 \\ 0 & 2014 \end{pmatrix}$$

E_3) Egalând componentele $\Rightarrow$

$$\begin{cases} 2014z = 2014 & \Rightarrow z=1 \\ 2014t = 0 & \Rightarrow t=0 \\ x-z = 0 & \Rightarrow x-1=0 \Rightarrow x=1 \text{ (am înlocuit } z=1) \\ y-t = 2014 & \Rightarrow y-0=2014 \Rightarrow y=2014 \text{ (am înlocuit } t=0) \end{cases}$$

E_4) Așadar, $x=1$, $y=2014$, $z=1$, $t=0$

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & 2014 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Fie $f = X^3 - 6X^2 + mX - 6$, calculați

$f(0) = ?$

$E_1)$ $f(0) = 0^3 - 6 \cdot 0^2 + m \cdot 0 - 6$

$\Rightarrow f(0) = -6$

Fie $f = X^3 - 6X^2 + mX - 6$, arătați că

$$\frac{1}{x_1 x_2} + \frac{1}{x_2 x_3} + \frac{1}{x_3 x_1} = 1, \text{ unde } x_1, x_2, x_3$$

sunt rădăcinile lui f

E1) Fie $N = {}^{x_3/}\frac{1}{x_1 x_2} + {}^{x_1/}\frac{1}{x_2 x_3} + {}^{x_2/}\frac{1}{x_3 x_1} \Rightarrow$

$$\Rightarrow N = \frac{x_3 + x_1 + x_2}{x_1 x_2 x_3} = \frac{S_1}{S_3}$$

E2) Din VIETE, $S_1 = x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a} = \frac{6}{1} = 6$

$$S_2 = x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 = \frac{c}{a} = \frac{m}{1} = m$$

$$S_3 = x_1 x_2 x_3 = -\frac{d}{a} = -\frac{-6}{1} = 6$$

E3) $N = \frac{S_1}{S_3} = \frac{6}{6} = 1$

Fie $f = X^3 - 6X^2 + mX - 6$, găsiți $m \in \mathbb{R}$ dacă rădăcinile lui f sunt 3 numere întregi consecutive

---

E1) răd sunt 3 numere întregi consecutive

$\Rightarrow x_1 = \alpha$, $x_2 = \alpha + 1$, $x_3 = \alpha + 2$

E2) din VIETE $\Rightarrow$

$$s_1 = x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a} = -\frac{-6}{1} = 6$$

Dar, $x_1 + x_2 + x_3 = \alpha + (\alpha + 1) + (\alpha + 2) \Rightarrow$

$$s_1 = 3\alpha + 3$$

E3) $s_1 = 6 \Rightarrow 3\alpha + 3 = 6 \Rightarrow 3\alpha = 3 \Rightarrow \boxed{\alpha = 1}$

E4) $\alpha = 1$ e rădăcină $\Rightarrow f(\alpha) = 0 \Rightarrow f(1) = 0$

$$\Rightarrow 1 - 6 + m - 6 = 0 \Rightarrow -11 + m = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{m = 11}$$

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$, arătați că

$$f'(x)=\frac{(1-x)(1+x)}{(x^2+1)^2}$$

E1) $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}\Rightarrow f'(x)=\left(\dfrac{x}{x^2+1}\right)'\Rightarrow$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{x'(x^2+1)-x\cdot(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}=\frac{1(x^2+1)-x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=$$

$$=\frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2}=\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}=\frac{(1-x)(1+x)}{(x^2+1)^2}$$

Fie $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$, găsiți ec. tangentei la G_f în $x_0=1$

E1) Ec. tg în $x=\alpha$ este

$$y-f(\alpha)=f'(\alpha)(x-\alpha)$$

E2) în cazul nostru, ec. tg.

$$y-f(1)=f'(1)(x-1)$$

E3) $f(1)=\frac{1}{1^2+1} \Rightarrow f(1)=\frac{1}{2}$

E4) $f'(x)=\left(\frac{x}{x^2+1}\right)'=\frac{1\cdot(x^2+1)-x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$

$\Rightarrow f'(1)=\frac{1-1}{2^2} \Rightarrow f'(1)=0$

E5) ec. tg.: $y-f(1)=f'(1)(x-1) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow y-\frac{1}{2}=0(x-1) \Rightarrow y-\frac{1}{2}=0$$

$$\Rightarrow y=\frac{1}{2}$$

Fie $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$, găsiți punctele de extrem local ale lui f.

E1) $f'(x)=\dfrac{x'(x^2+1)-x\cdot(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}=$

$$=\frac{1(x^2+1)-x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$$

E2) $f'(x)=0 \Rightarrow 1-x^2=0 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1$

E3)

x		-1		1	
f'	$- - - -$	0	$+ + +$	0	$- - - -$
f	$\searrow$	$-1/2$	$\nearrow$	$1/2$	$\searrow$

Pt a găsi semnul lui $f'(x)$, dăm valori

$$f'(-2)=\frac{1-(-2)^2}{((-2)^2+1)^2}=\frac{1-4}{5^2}<0 \Rightarrow f'(x)<0$$

$\mu(-\infty;-1) \Rightarrow f_1 \searrow \ \mu(-\infty;-1]$

$f'(0)=\dfrac{1}{1^2}>0 \Rightarrow f'(x)>0 \ \mu(-1;1) \Rightarrow f_1 \nearrow \mu(-1;1)$

$f'(2)=\dfrac{1-2^2}{(2^2+1)^2}=\dfrac{-3}{5^2}<0 \Rightarrow f'(x)<0 \Rightarrow f_1 \searrow$

E4) $x=-1 \Rightarrow f(-1)=\dfrac{-1}{1+1}=-\dfrac{1}{2}$; $f(1)=\dfrac{1}{1+1}=\dfrac{1}{2}$

E5) din tabel $\Rightarrow A(-1;-1/2)$ pct MINIM, $B(1;1/2)$ MAXIM

Fie $f(x)=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+3}$, arătați

că $\int_0^1 \left(f(x)-\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}\right)dx=\ln 2$

E1) $I=\int_0^1\left(\frac{1}{x+1}+\cancel{\frac{1}{x+2}}+\cancel{\frac{1}{x+3}}-\cancel{\frac{1}{x+2}}-\cancel{\frac{1}{x+3}}\right)dx=$

$=\int_0^1 \frac{1}{x+1}dx=\frac{\ln|x+1|}{1}\Big|_0^1=\ln 2-\ln 1=$

$=\ln 2$

s-a folosit $\ln 1=0$ și

$\int\frac{1}{ax+b}=\frac{\ln|ax+b|}{a}$

Fie $f(x)=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+3}$, arătați că

orice primitivă a lui f este concavă pe $(-1;\infty)$

E_1) Fie F o primitivă oarecare pt F, vom

arăta că $F''(x)\geq 0, \forall x\in(-1;\infty)$

E_2) F primit pt $f \Leftrightarrow \begin{cases} F \text{ derivabilă și} \\ F'(x)=f(x) \end{cases}$

E_3) $F'(x)=f(x) \Rightarrow F'(x)=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+3}$

E_4) $F''(x)=\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+3}\right)'=$

$$=-\frac{1}{(x+1)^2}\cdot(x+1)'-\frac{1}{(x+2)^2}\cdot(x+2)'-\frac{1}{(x+3)^2}\cdot(x+3)'=$$

$$=-\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{1}{(x+2)^2}-\frac{1}{(x+3)^2}$$

E_5) Deoarece $\forall$ pătrat perfect e pozitiv

$\Rightarrow F''(x)\leq 0, \forall x\in(-1;\infty) \Rightarrow$

F concavă, $\forall x\in(-1;\infty)$

Fie $f(x)=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+3}$, arătați

că aria dintre G_f, $x=0$ și $x=n$ are aria

mai mare sau egală cu $\ln 4$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$

E1) $A=\int_0^n |f(x)|\,dx=\int_0^n \left|\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+3}\right| dx$

E2) Deoarece $x\in[0;n] \Rightarrow \frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+3}\geq 0$

$\Rightarrow A=\int_0^n \left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+3}\right) dx=$

$=\frac{\ln|x+1|}{1}\Big|_0^n+\frac{\ln|x+2|}{1}\Big|_0^n+\frac{\ln|x+3|}{1}\Big|_0^n$

$=(\ln|n+1|-\ln 1)+(\ln|n+2|-\ln 2)+\ln|n+3|-\ln 3$

$=\ln((n+1)(n+2)(n+3))-\ln(1\cdot 2\cdot 3)=$

$=\ln\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{1\cdot 2\cdot 3}$

E3) Ar trebui arătat că $\ln\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6}\geq \ln 4$

$\Leftrightarrow \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6}\geq 4$. Dar, $n\in\mathbb{N}^* \Rightarrow n\geq 1$

$\Rightarrow (n+1)(n+2)(n+3)\geq 2\cdot 3\cdot 4 \Rightarrow \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6}\geq \frac{2\cdot 3\cdot 4}{6}$

$\Rightarrow \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6}\geq 4$ ceea ce trebuia demonstrat