Examenul de bacalaureat național 2017

Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Se consideră numărul complex $z=1-i$. Arătați că $z^2+2i=0$.
5p	**2.** Calculați $(g\circ f)(0)$, unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+2017$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=x-2017$.
5p	**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{x^2-3x}=3^{x-4}$.
5p	**4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $M=\{1,2,3,\ldots,100\}$, acesta să fie pătrat perfect.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctul $A(0,1)$. Determinați ecuația dreptei d, care trece prin punctul A și este perpendiculară pe dreapta de ecuație $y=x-10$.
5p	**6.** Determinați aria triunghiului ABC, știind că $AB=6$, $AC=4$ și $A=\dfrac{\pi}{6}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră matricea $A(m)=\begin{pmatrix} m-1 & -1 \\ 2 & m-2 \end{pmatrix}$, unde m este număr real.
5p	**a)** Calculați $\det(A(0))$.
5p	**b)** Demonstrați că $A(1+m)+A(1-m)=2A(1)$, pentru orice număr real m.
5p	**c)** Demonstrați că matricea $A(m)$ este inversabilă, pentru orice număr real m.
	2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=-3xy+9x+9y-24$.
5p	**a)** Arătați că $x*y=-3(x-3)(y-3)+3$, pentru orice numere reale x și y.
5p	**b)** Demonstrați că legea de compoziție „$*$" este asociativă.
5p	**c)** Determinați numărul real x, pentru care $(x*x)*x=12$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-3\ln x$.
5p	**a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{3(x-1)(x^2+x+1)}{x}$, $x\in(0,+\infty)$.
5p	**b)** Determinați ecuația asimptotei verticale la graficul funcției f.
5p	**c)** Demonstrați că $f(x)\geq 1$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.
	2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{2x+3}{x^2+3x+3}$.
5p	**a)** Calculați $\displaystyle\int_1^2 (x^2+3x+3)f(x)\,dx$.
5p	**b)** Arătați că suprafața plană delimitată de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=3$ are aria egală cu $\ln 7$.
5p	**c)** Demonstrați că $\displaystyle\int_{-1}^{0} f'(x)f(x)\,dx=0$.

M2/2017
VM/I/1

Fie $z=1-i$, arătați că $z^2+2i=0$

E1) $z^2+2i=(1-i)^2+2i=1-2i+i^2+2i=$

$=1-\cancel{2i}-1+\cancel{2i}=0$

M12/2017

V M / I / 2

Calculați $(g \circ f)(0)$ dacă $f(x) = x + 2017$ și $g(x) = x - 2017$

$E_1)\ (g \circ f)(0) = g(f(0)) = g(2017) =$

$= 2017 - 2017 = 0$

M 2/2017
VM/I/3

Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația:

$$3^{x^2-3x}=3^{x-4}$$

E1) deoarece $f(x)=3^x$ e injectivă rezultă că ec. e echivalentă cu

$$x^2-3x=x-4$$

E2) $x^2-4x+4=0$

$$x_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{16-4\cdot4}}{2\cdot1}=\frac{4\pm0}{2}=2$$

$\Rightarrow x_1=x_2=2$ soluții

M2/2017
VM/I/4

Calculați probabilitatea ca alegând un număr din mulțimea $M=\{1;2;3;...;100\}$, acesta să fie pătrat perfect

E1) $P = \dfrac{\text{nr. caz favorabile}}{\text{nr. caz posibile}}$

E2) nr. caz posibile: toate elementele din $M=\{1;2;3;...;100\}$ adică 100 elemente

E3) nr. caz favorabile: toate pătratele perfecte din M, adică $\{1;4;9;...;100\}$ care le putem scrie $\{1^2;2^2;3^2;...;10^2\} \Rightarrow 10$ elemente

E4) $P = \dfrac{10}{100} = \dfrac{1}{10}$

M2/2017
VM/I/5

Fie $A(0;1)$, găsiți ecuația dreptei ce trece prin A și este perpendiculară pe $y=x-10$

$E_1)$ $d' \perp d \Leftrightarrow m_{d'} \cdot m_d = -1$

$E_2)$ $d: y=x-10 \Rightarrow m_d = 1$

$\Rightarrow \boxed{m_{d'} = -1}$

$E_3)$ trece prin $A(0;1)$ și are $m_{d'} = -1 \Rightarrow$ ec. d' este: $y-1=-1(x-0) \Leftrightarrow y-1=-x$

$\Leftrightarrow y=-x+1$

Găsiți $\mathcal{A}_{ABC}$ dacă $AB=6$, $AC=4$ și $A=\frac{\pi}{6}$

M2/2017
VM/I/6

$$E_1)\ \mathcal{A}=\frac{AB\cdot AC\cdot \sin A}{2}=\frac{6\cdot 4\cdot \sin 30^\circ}{2}=\frac{24\cdot \frac{1}{2}}{2}=6$$

M2/2017
VM/II (a)

Fie $A(m)=\begin{pmatrix} m-1 & -1 \\ 2 & m-2 \end{pmatrix}$

Calculați $\det(A(0))$

E,) $\det(A(0)) = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 2+2=4$

Fie $A(m)=\begin{pmatrix} m-1 & -1 \\ 2 & m-2 \end{pmatrix}$, arătați

că $A(1+m)+A(1-m)=2A(1)$, $\forall m\in\mathbb{R}$

M2/2017
VM/II 1 b)

$E_1)$ $A(1+m)+A(1-m)=\begin{pmatrix} 1+m-1 & -1 \\ 2 & 1+m-2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1-m-1 & -1 \\ 2 & 1-m-2 \end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix} m & -1 \\ 2 & m-1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -m & -1 \\ 2 & -m-1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$E_2)$ $2A(1)=2\cdot\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \quad (2)$

$E_3)$ din (1) și (2) $\Rightarrow A(1+m)+A(1-m)=2A(1)$

Fie $A(m)=\begin{pmatrix} m-1 & -1 \\ 2 & m-2 \end{pmatrix}$, arătați | M/2/2017 VM/(II 1.a)

că $A(m)$ este inversabilă, $\forall m\in\mathbb{R}$

E_1) $A(m)$ inversabilă $\Leftrightarrow \det(A(m))\neq 0, \forall m\in\mathbb{R}$

E_2) $\det(A(m))=\begin{vmatrix} m-1 & -1 \\ 2 & m-2 \end{vmatrix}=(m-1)(m-2)+2=$

$=m^2-3m+2+2=m^2-3m+4$

E_3) dacă $\det(A(m))=0 \Leftrightarrow m^2-3m+4=0 \Leftrightarrow$

$$m_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{9-12}}{2\cdot 1} \Rightarrow \Delta<0 \Rightarrow m_{1,2}\notin\mathbb{R}$$

$\Rightarrow$ nu există $m\in\mathbb{R}$ pt care $\det(A(m))=0$

$\Rightarrow A(m)$ inversabilă, $\forall m\in\mathbb{R}$

Fie $x * y = -3xy + 9x + 9y - 24$

M 2/2017
VM / II 2a)

Arătați că $x * y = -3(x-3)(y-3)+3, \forall x, y \in \mathbb{R}$

met I (dacă se dă rezultatul)

$E_1)$ $-3(x-3)(y-3)+3 = -3(xy-3x-3y+9)+3 =$

$= -3xy+9x+9y-27+3$

$= -3xy+9x+9y-24 = x*y$

met II (dacă nu știm rezultatul, dar se cere scrierea sub formă de produs)

$E_1)$ $x * y = -3\underbrace{xy+9}x+9y-24 =$

$= -3x(y-3)+9(y-3)+27-24$

$= (y-3)(-3x+9)+3 =$

$= (y-3)(-3)(x-3)+3 = -3(x-3)(y-3)+3$

M2/2017
VM/II/2b

Fie $x*y=-3xy+9x+9y-24$, arătați că legea este asociativă (se știe că $x*y=-3(x-3)(y-3)+3$)

met I (pt cei deștepți)

E1) $\forall x,y,z\in\mathbb{R} \overset{(?)}{\Rightarrow} (x*y)*z=x*(y*z)$

E2) $(x*y)*z=\big(\underbrace{-3(x-3)(y-3)+3}_{x}\big)*\underbrace{z}_{y}=$

$=-3\big(-3(x-3)(y-3)+\cancel{3}-\cancel{3}\big)(z-3)+3=$

$=9(x-3)(y-3)(z-3)+3 \quad (1)$

E3) $x*(y*z)=x*\big(-3(y-3)(z-3)+3\big)=$

$=-3(x-3)\big(-3(y-3)(z-3)+\cancel{3}-\cancel{3}\big)+3=$

$=9(x-3)(y-3)(z-3)+3 \quad (2)$

E4) din (1) și (2) $\Rightarrow$ $*$ asociativă

met II (muncitorească)

E1) $\forall x,y,z\in\mathbb{R} \Rightarrow (x*y)*z=x*(y*z)$

E2) $(x*y)*z=(-3xy+9x+9y-24)*z=$

$=-3(-3xy+9x+9y-24)z+9(-3xy+9x+9y-24)+9z-24=$

$=(9xy-27x-27y+72)z-27xy+81x+81y-216+9z-24=$

$=9xyz-27xz-27yz+72z-27xy+81x+81y+9z-240$

$=9xyz-27(xz+yz+xy)+81(x+y+z)-240$

Se calculează analog $x*(y*z)$ și avem egalitate

Fie $x * y = -3xy + 9x + 9y - 24$, se știe că $x * y = -3(x-3)(y-3) + 3$, se cere rezolvarea ecuației $(x * x) * x = 12$

M2/2017 (VM/II 2c)

met I (pt. cei deștepți)

$E_1)$ $(x * x) * x = (\underbrace{-3(x-3)(x-3)+3}_{x}) * \underbrace{x}_{y} =$

$= -3(-3(x-3)(x-3) + \cancel{3} - \cancel{3})(x-3) + 3 =$

$= 9(x-3)^3 + 3$

$E_2)$ ec. devine $9(x-3)^3 + 3 = 12 \Leftrightarrow 9(x-3)^3 = 9$

$\Leftrightarrow (x-3)^3 = 1 \Leftrightarrow x - 3 = 1 \Leftrightarrow x = 4$

met II (pt ceilalți)

$E_1)$ $(x * x) * x = 12 \Leftrightarrow (-3x^2 + 9x + 9x - 24) * x = 12$

$\Leftrightarrow (-3x^2 + 18x - 24) * x = 12 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -3(-3x^2 + 18x - 24)x + 9(-3x^2 + 18x - 24) + 9x - 24 = 12$

$\Leftrightarrow (9x^2 - 54x + 72)x - 27x^2 + 162x - 216 + 9x - 36 = 0$

$\Leftrightarrow 9x^3 - 54x^2 + 72x - 27x^2 + 171x - 252 = 0$

$\Leftrightarrow 9x^3 - 81x^2 + 243x - 252 = 0 \;|:9$

$\Leftrightarrow x^3 - 9x^2 + 27x - 28 = 0$

	x^3	x^2	x	x^0
	1	-9	27	-28
1	1	-8	15	$-13 \neq 0$
4	1	-5	7	0

$\Rightarrow (x-4)(x^2 - 5x + 7) = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} \boxed{x = 4} \\ x^2 - 5x + 7 = 0,\ \Delta = -3 < 0 \text{ fals} \end{cases}$

Fie $f(x)=x^3-3\ln x$, arătați că

M2/2017
VM/III/1a)

$$f'(x)=\frac{3(x-1)(x^2+x+1)}{x}, \forall x\in(0,\infty)$$

E1) $f'(x)=3x^2-3\cdot\frac{1}{x}=3\left(x^2-\frac{1}{x}\right)=3\cdot\frac{x^3-1}{x}$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{3(x-1)(x^2+x+1)}{x},$$

s-a folosit formula $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

Fie $f:(0;\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-3\ln x$

M2/2017
VM (III 1b)

Se cere ec. as. verticale la G_f

R) Deoarece $D_f=(0;\infty)\Rightarrow$ studiem ec. as. verticale în $x=0$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\left(x^3-3\ln x\right)\xlongequal[0+\infty]{0-3\ln 0_+}\infty$$

$\Rightarrow$ ec. as. verticale este $x=0$ la dreapta

M2/2017 VM/III/1c)

Fie $f(x)=x^3-3\ln x$, $f:(0;\infty)\to\mathbb{R}$

Se știe că $f'(x)=\dfrac{3(x-1)(x^2+x+1)}{x}$, arătați

că $f(x)\geq 1$, $\forall x\in(0;\infty)$

$E_1)$ $f'(x)=0 \Rightarrow (x-1)(x^2+x+1)=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x-1=0 \Rightarrow x_1=1 \\ \text{sau} \\ x^2+x+1=0,\ \Delta=-3 \Rightarrow \text{nu are răd reale} \end{cases}$

$E_2)$

x	0		1	
f'		$- - -$	0	$+ + +$
f		$\searrow$	1	$\nearrow$

Pt. a găsi semnul lui $f'(x)$, dăm valori

$f'\left(\frac{1}{2}\right)=\dfrac{3\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+1\right)}{\frac{1}{2}}<0 \Rightarrow f'(x)\leq 0$ pe $(0;1]$

$\Rightarrow f_s \searrow$ pe $(0;1]$

$f'(2)=\dfrac{3(2-1)(4+2+1)}{2}>0 \Rightarrow f'(x)\geq 0$ pe $[1;\infty)$

$\Rightarrow f_s \nearrow$ pe $[1;\infty)$

$f(1)=1-3\ln 1=1-0=1$

$E_3)$ din tabelul de variație rezultă că $f(x)\geq 1$, $\forall x\in(0;\infty)$

Fie $f(x)=\frac{2x+3}{x^2+3x+3}$, se cere

M2/2017
VM/III/2 a)

$$\int_1^2 (x^2+3x+3) f(x)\,dx$$

Ex) $I=\int_1^2 \cancel{(x^2+3x+3)}\cdot\frac{2x+3}{\cancel{x^2+3x+3}}\,dx=$

$$=\int_1^2 (2x+3)\,dx = \cancel{2}\cdot\frac{x^2}{\cancel{2}}\Big|_1^2+3x\Big|_1^2=$$

$$=(4-1)+3(2-1)=6$$

Fie $f(x)=\dfrac{2x+3}{x^2+3x+3}$, arătați

M2/2017
VM|III|(2b)

că aria delimitată de G_f, axa Ox și dreptele

$x=0$ și $x=3$ este $\ln 7$

E1) $A=\int_0^3 |f(x)|\,dx=\int_0^3 \left|\dfrac{2x+3}{x^2+3x+3}\right| dx$

E2) pt a explicita modulul, folosim

$x\in[0;3] \Rightarrow \dfrac{2x+3}{x^2+3x+3}>0 \Rightarrow$

$\Rightarrow A=\int_0^3 \dfrac{2x+3}{x^2+3x+3}\,dx=\int_0^3 \dfrac{(x^2+3x+3)'}{x^2+3x+3}\,dx$

$=\ln|x^2+3x+3|\Big|_0^3=\ln(9+9+3)-$

$-\ln 3$

$=\ln\dfrac{21}{3}=\ln 7$

M2/2017

VM/III/2c

Fie $f(x)=\frac{2x+3}{x^2+3x+3}$, demonstrați

că $\int_{-1}^{0} f'(x)f(x)dx=0$

E1) folosim $\int f^n f' = \frac{f^{n+1}}{n+1}+\mathcal{C}$

E2) $\int_{-1}^{0} f'(x)f(x)dx=\int_{-1}^{0} f(x)f'(x)dx=$

$$=\frac{f^2(x)}{2}\Big|_{-1}^{0}=\frac{f^2(0)}{2}-\frac{f^2(-1)}{2}$$

E3) $f^2(0)=(f(0))^2=\left(\frac{3}{3}\right)^2=1$

$f^2(-1)=(f(-1))^2=\left(\frac{-2+3}{1-\cancel{3}+\cancel{3}}\right)^2=1^2=1$

E4) $I=\int_{-1}^{0} f'(x)f(x)dx=1-1=0$