INSPECTORATUL
ȘCOLAR JUDEȚEAN
HUNEDOARA

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

Simularea examenului de bacalaureat național 2017
Proba E. c) - 26.01.2017
M_st-nat.

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

Subiectul I **(30 puncte)**

5p 1. Într-o progresie aritmetică avem $a_1 = -3$ și $r = 3$. Calculați suma primilor 10 termeni.

5p 2. Aflați valoarea minimă a funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 4x + 3$.

5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2^x + 4^x - 6 = 0$.

5p 4. În câte moduri pot fi aleși 3 elevi dintr-un grup de 7 elevi.

5p 5. Aflați ecuația mediatoarei segmentului $[AB]$ știind că $A(2,1)$ și $B(4,3)$.

5p 6. Calculați $sin 15^\circ + sin 75^\circ$.

Subiectul II **(30 puncte)**

1. Fie $A \in M_2(\mathbb{R})$, $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$.

5p a) Calculați $det(A + A^2)$.

5p b) Determinați $(A + A^2)^{-1}$.

5p c) Determinați $x, y, z, t \in \mathbb{R}$ astfel încât $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

2. Pe mulțimea $\mathbb{R}$ se definește legea de compoziție $x * y = 2xy - 6x - 6y + 21$.

5p a) Verificați dacă $x * y = 2(x-3)(y-3) + 3, \forall x, y \in \mathbb{R}$.

5p b) Rezolvați în mulțimea $\mathbb{R}$ ecuația $x * x = 11$.

5p c) Știind că operația „ $*$ "este asociativă, calculați $1 * \sqrt{2} * \sqrt{3} * \ldots * \sqrt{2017}$.

Subiectul III **(30 puncte)**

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = e^x - ex - 1$.

5p a) Calculați derivata funcției pentru $x \in \mathbb{R}$.

5p b) Arătați că f este convexă pe $\mathbb{R}$.

5p c) Determinați coordonatele punctului de intersecție, dintre tangenta la graficul funcției, în punctul de abscisă $x_0 = 0$ și dreapta de ecuație $x = 1$.

2. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = x + \frac{1}{x}$.

5p a) Determinați mulțimea primitivelor funcției f.

5p b) Arătați că $\int_1^2 f^2(x)dx = \frac{29}{6}$.

5p c) Calculați $\int_1^e f(x) lnx dx$.

Str. Gh. Baritiu nr. 2, 330065 - DEVA, jud. HUNEDOARA
Tel: +4 (0) 254213315, +4 (0) 254215755
Fax: +4 (0) 254215034, +4 (0) 254220911
inspectorat@isj.hd.edu.ro, http://isj.hd.edu.ro

I/1

Dacă a_n progr aritm cu $a_1=-3$, $r=3$, se cere suma primilor 10 termeni

E1) folosim $S_n=\frac{(a_1+a_n)\cdot n}{2} \Rightarrow S_{10}=\frac{(a_1+a_{10})\cdot 10}{2}$

E2) $a_n=a_1+(n-1)r \Rightarrow a_{10}=-3+9\cdot 3 \Rightarrow a_{10}=24$

E3) $S_{10}=\frac{(-3+24)\cdot \cancel{10}^{5}}{\cancel{2}}=21\cdot 5=105$

Aflați valoarea minimă pentru
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 4x + 3$

E1) $a = 1 > 0 \Rightarrow f$ are minim egal cu $-\frac{\Delta}{4a}$

E2) $\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 16 - 12 = 4$

$\Rightarrow \min f = -\frac{4}{4 \cdot 1} = -1$

M2/2017/S.II
I/3

Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația:

$$2^x+4^x-6=0$$

E1) not $t=2^x \Rightarrow 4^x=t^2 \Rightarrow$ ec. devine

$$t+t^2-6=0 \Rightarrow t^2+t-6=0$$

E2) $t_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+24}}{2\cdot 1}=\frac{-1\pm 5}{2} \begin{cases} \frac{4}{2}=2 \\ -\frac{6}{2}=-3 \end{cases}$

E3) $t_1=2 \Rightarrow 2^x=2$, cum $f(x)=2^x$ e inj $\Rightarrow \boxed{x=1}$

$t_2=-3 \Rightarrow 2^x=-3$ fals deoarece dacă $2>0$

$\Rightarrow 2^x>0$

E4) $S_f: \boxed{x=1}$

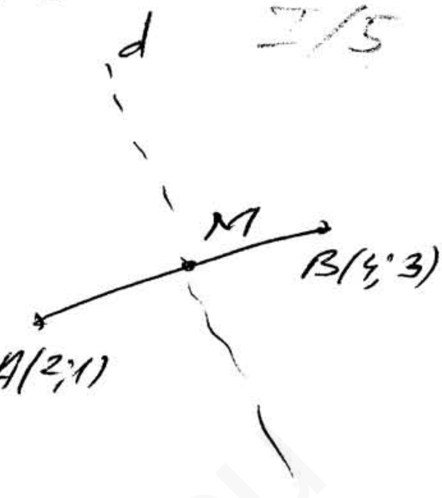
În câte moduri pot fi aleși 3 elevi dintr-un grup de 7 elevi

M2/2017/S4
I/4

E1) nu contează ordinea în care alegem 3 elevi din 7, deci avem C_7^3 moduri

E2) $C_7^3 = \frac{7!}{3!(7-3)!} = \frac{7!}{3!\cdot 4!} = \frac{\cancel{4!}\cdot 5\cdot 6\cdot 7}{\cancel{3!}\cdot \cancel{4!}} = 35$

Aflați ec. mediatoarei lui AB dacă $A(2;1)$, $B(4;3)$



E1) Fie M mijl AB

$$\Rightarrow \begin{cases} x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \\ y_M = \frac{y_A + y_B}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_M = \frac{2+4}{2} = 3 \\ y_M = \frac{1+3}{2} = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow M(3;2)$$

E2) mediatoarea este dreapta perpendiculară pe mijlocul segmentului $\Rightarrow d \perp AB \Rightarrow m_d \cdot m_{AB} = -1$

E3) $m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{3-1}{4-2} = \frac{2}{2} = 1$

$$\Rightarrow m_d \cdot 1 = -1 \Rightarrow m_d = -1$$

E4) știm $M(3;2)$, știm $m_d = -1$

$\Rightarrow$ ec d: $y - y_M = m_d(x - x_M)$

$$\Rightarrow y - 2 = -1(x-3) \Rightarrow y - 2 = -x + 3$$

$$\Rightarrow \boxed{x + y - 5 = 0}$$

M2/2017/SH
I/6

Calculați: $\sin 15^\circ + \sin 75^\circ$

E1) $\sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ) =$

$= \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

E2) $\sin 75^\circ = \sin(45^\circ + 30^\circ) =$

$= \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sin 75^\circ = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

E3) $\sin 15^\circ + \sin 75^\circ = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} = \frac{2\sqrt{6}}{4} = \frac{\sqrt{6}}{2}$

M2/2019/SH

Fie $A=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$, calculați $\det(A+A^2)$ II 1(a)

E1) $A^2=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1+6 & -2+0 \\ -3+0 & 6+0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow A^2=\begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$

E2) $A+A^2=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$

E3) $\det(A+A^2)=\begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{vmatrix}=36-0=36$

Fie $A=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 3 & 0\end{pmatrix}$, se cere $(A+A^2)^{-1}$ M2/2017/SH II(5)

$E_1)$ $A^2=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 3 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 3 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & -2\\ -3 & 6\end{pmatrix}$

$E_2)$ $A+A^2=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 3 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}7 & -2\\ -3 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 0\\ 0 & 6\end{pmatrix}$

$E_3)$ $\det(A+A^2)=\begin{vmatrix}6 & 0\\ 0 & 6\end{vmatrix}=36\neq 0 \Rightarrow \exists (A+A^2)^{-1}$

$E_4)$ not $B=A+A^2 \Rightarrow B=\begin{pmatrix}6 & 0\\ 0 & 6\end{pmatrix}$

$B^t=\begin{pmatrix}6 & 0\\ 0 & 6\end{pmatrix}$, $b^*_{11}=(-1)^{1+1}\cdot|6|=6$

$b^*_{12}=(-1)^{1+2}\cdot|0|=0$

$b^*_{21}=(-1)^{1+2}\cdot|0|=0$

$b^*_{22}=(-1)^{2+2}\cdot|6|=6$

$\Rightarrow B^*=\begin{pmatrix}6 & 0\\ 0 & 6\end{pmatrix}$

$E_5)$ $B^{-1}=\dfrac{1}{\det B}\cdot B^*=\dfrac{1}{36}\begin{pmatrix}6 & 0\\ 0 & 6\end{pmatrix}\Rightarrow$

$$\boxed{B^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{6} & 0\\ 0 & \frac{1}{6}\end{pmatrix}}$$

M2 2019/SH
II 1 c)

Găsiți $x, y, z, t \in \mathbb{R}$ dacă

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

E1) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -x+2z & -y+2t \\ 3x & 3y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

E2) $$\begin{cases} -x+2z = 2 \\ -y+2t = 1 \\ 3x = 0 \Rightarrow \boxed{x=0} \\ 3y = 3 \Rightarrow \boxed{y=1} \end{cases}$$

înlocuim în ec(1) și în (2) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0+2z=2 \Rightarrow \boxed{z=1} \\ -1+2t=1 \Rightarrow 2t=2 \Rightarrow \boxed{t=1} \end{cases}$$

E3) soluția este $\begin{cases} x=0 \\ y=1 \\ z=1 \\ t=1 \end{cases}$

Fie $x * y = 2xy - 6x - 6y + 21$

verificați dacă $x * y = 2(x-3)(y-3) + 3$

$E_1)$ $2(x-3)(y-3) + 3 = 2(xy - 3x - 3y + 9) + 3 =$

$= 2xy - 6x - 6y + 18 + 3 =$

$= 2xy - 6x - 6y + 21 = x * y$

Fie $x * y = 2xy - 6x - 6y + 21$,

rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $x * x = 11$

$E_1)$ $x * x = 11 \Leftrightarrow 2x^2 - 6x - 6x + 21 = 11$

$\Leftrightarrow 2x^2 - 12x + 10 = 0 \;|:2$

$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 5 = 0$

$E_2)$ $x_{1,2} = \dfrac{6 \pm \sqrt{36-20}}{2 \cdot 1} = \dfrac{6 \pm 4}{2} \begin{array}{l} \nearrow 5 \\ \searrow 1 \end{array}$

$E_3)$ sol finală $x \in \{1; 5\}$

M2/2017/S11

I 2 c)

Pe $\mathbb{R}$ avem: $x * y = 2xy - 6x - 6y + 21$

. Știind că $x * y = 2(x-3)(y-3)+3$ și că $*$ este asociativă, calculați

$$1 * \sqrt{2} * \sqrt{3} * \dots * \sqrt{2017}$$

E_1) din $x * y = 2(x-3)(y-3)+3 \Rightarrow$

$$x * 3 = 2(x-3)\cdot 0 + 3 = 3, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$3 * y = 2 \cdot 0 \cdot (y-3) + 3 = 3, \forall y \in \mathbb{R}$$

E_2) folosind că $*$ asociativă $\Rightarrow$

$$1 * \sqrt{2} * \dots * \sqrt{2017} = (1 * \dots * \sqrt{8}) * \sqrt{9} * (\sqrt{10} * \dots * \sqrt{2017})$$

$$= (1 * \dots * \sqrt{8}) * 3 * (\sqrt{10} * \dots * \sqrt{2017}) \overset{x * 3 = 3}{=}$$

$$= 3 * (\sqrt{10} * \dots * \sqrt{2017}) \overset{3 * y = 3}{=}$$

$$= 3$$

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x-ex-1$

Calculați $f'(x)$

R) $f'(x)=(e^x-ex-1)'=e^x-e$

Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x - ex - 1$ M2/2017/SH III 1(b)

Arătați că f este CONVEXĂ pe $\mathbb{R}$

E1) $f'(x) = (e^x - ex - 1)' = e^x - e$

$f''(x) = (e^x - e)' = e^x$

E2) Cum $e > 0 \Rightarrow e^x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow f''(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f$ CONVEXĂ pe $\mathbb{R}$

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x-ex-1$, determinați coordonatele punctului de intersecție dintre tangenta la G_f în $x_0=0$ și dreapta de ecuație $x=1$

M2/2017/SH III 1c)

E1) ec. tg în $x=\alpha$ la G_f este

$$y-f(\alpha)=f'(\alpha)(x-\alpha)$$

$\Rightarrow$ ec. tg în $x_0=0$ este

$$y-f(0)=f'(0)(x-0)$$

E2) $f(0)=e^0-0-1=0$

E3) $f'(0)=?$, $f'(x)=e^x-e \Rightarrow f'(0)=e^0-e=1-e$

E4) $\Rightarrow$ ec. tg:

$$y-0=(1-e)(x-0)\Rightarrow y=(1-e)x$$

E5) pct de intersecție $\begin{cases} y=(1-e)x \\ x=1 \end{cases} \Rightarrow y=1-e$

$$\Rightarrow A(1;1-e)$$

M2/2017/S II

III 2 a)

Fie $f(x) = x + \frac{1}{x}$, determinați

mulțimea primitivelor lui f

E1) $F(x) = \int \left(x + \frac{1}{x}\right) dx = \frac{x^2}{2} + \ln|x| + C$

Fie $f(x) = x + \frac{1}{x}$, arătați că $\int_1^2 f^2(x)\,dx = \frac{29}{6}$ M2/2017/SH III 2 b)

$$E_1)\ I = \int_1^2 \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 dx = \int_1^2 \left(x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}\right) dx$$

$$= \frac{x^3}{3}\Big|_1^2 + 2x\Big|_1^2 + \int_1^2 x^{-2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{3}(8-1) + 2(2-1) + \frac{x^{-1}}{-1}\Big|_1^2 =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot 7 + 2 - \frac{1}{x}\Big|_1^2 =$$

$$= \frac{7}{3} + {}^{3)}2 - \left(\frac{1}{2} - {}^{2)}1\right) = \frac{13}{3} + \frac{1}{2} = \frac{29}{6}$$

M2/2017/SII
III 2c)

Fie $f(x)=x+\frac{1}{x}$, calculați

$$\int_1^e f(x)\ln x\,dx$$

E1) $I=\int_1^e\left(x+\frac{1}{x}\right)\ln x\,dx=$

$$=\underbrace{\int_1^e x\ln x\,dx}_{I_1}+\underbrace{\int_1^e\frac{\ln x}{x}\,dx}_{I_2}$$

E2) $I_1=\int_1^e x\ln x\,dx$

$f(x)=\ln x\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{x}$

$g'(x)=x\Rightarrow g(x)=\frac{x^2}{2}$

$$I_1=\frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^e-\frac{1}{2}\int_1^e x\,dx=$$

$$=\frac{1}{2}(e^2\ln e-1\ln 1)-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_1^e=$$

$$=\frac{e^2}{2}-0-\frac{1}{4}(e-1)\Rightarrow I_1=\frac{e^2}{2}-\frac{e-1}{4}=\frac{2e^2-e+1}{4}$$

E2) $I_2=\int_1^e\frac{\ln x}{x}\,dx$

not $t=\ln x\,|()'\Rightarrow dt=\frac{1}{x}\,dx$

$x=1\Rightarrow t=\ln 1=0$; $x=e\Rightarrow t=\ln e=1$

$$I_2=\int_1^e t\,dt=\frac{t^2}{2}\Big|_1^e=\frac{e^2-1}{2}$$

E3) $I=\frac{2e^2-e+1}{4}-{}^{2)}\frac{e^2-1}{2}=\frac{\cancel{2e^2}-e+1-\cancel{2e^2}+2}{4}=\boxed{\frac{3-e}{4}}$