Examenul de bacalaureat național 2018
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Varianta 2

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinați numărul complex z, știind că $2\overline{z}-z=1-3i$, unde $\overline{z}$ este conjugatul lui z.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-mx+1$, unde m este număr real. Determinați numerele reale m, știind că vârful parabolei asociate funcției f se află pe axa Ox.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\dfrac{\lg x}{\lg(x+2)}=\dfrac{1}{2}$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifrele distincte și impare.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctul $A(-5,2)$ și dreapta d de ecuație $y=x+1$. Determinați ecuația dreptei care trece prin punctul A și este perpendiculară pe dreapta d.

5p **6.** Arătați că $\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)-\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)=0$, pentru orice număr real x.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $M(m)=\begin{pmatrix}2m & 1 & 1\\ 1 & 2m & 1\\ 1 & 1 & 2m\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}2mx+y+z=-1\\ x+2my+z=0\\ x+y+2mz=1\end{cases}$, unde m este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(M(0))=2$.

5p **b)** Determinați numerele reale m, știind că $\det(M(m))=0$.

5p **c)** Pentru $m=-1$, demonstrați că, dacă (a,b,c) este o soluție a sistemului, cel mult unul dintre numerele a, b și c este întreg.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=4xy+3x+3y+\dfrac{3}{2}$.

5p **a)** Demonstrați că $x*y=4\left(x+\dfrac{3}{4}\right)\left(y+\dfrac{3}{4}\right)-\dfrac{3}{4}$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Determinați numărul real x pentru care $x*x*x=-\dfrac{1}{2}$.

5p **c)** Determinați numerele reale a, știind că $f(x)*f(y)=f(x+y)$, pentru orice numere reale x și y, unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ae^x-\dfrac{3}{4}$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=8x^2-\ln x$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{(4x-1)(4x+1)}{x}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Demonstrați că punctul $A\left(\dfrac{2}{3},3\right)$ aparține tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=1$, situat pe graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că $f\left(\dfrac{1}{3}\right)<f\left(\dfrac{1}{\sqrt{7}}\right)<f\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

2. Se consideră funcția $f:(-3,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{2x+3}{x+3}$.

5p **a)** Arătați că $\displaystyle\int_0^1 (x+3)f(x)\,dx=4$.

5p **b)** Arătați că $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx=2-3\ln\frac{4}{3}$.

5p **c)** Pentru fiecare număr natural n, se consideră numărul $I_n=\displaystyle\int_0^1 e^x(x+3)^n(f(x))^n\,dx$. Demonstrați că $I_n+2nI_{n-1}=e\cdot 5^n-3^n$, pentru orice număr natural n, $n\geq 1$.