Examenul de bacalaureat național 2019

Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Varianta 2

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinaţi suma primilor trei termeni ai progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq1}$, știind că $b_1=1$ și $b_2=3$.

5p **2.** Se consideră x_1 și x_2 soluțiile ecuației $x^2+mx+7=0$, unde m este număr real. Determinați numărul real m pentru care $2x_1+2x_2+3x_1x_2=1$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_2(x-2)+\log_2(x+2)=5$.

5p **4.** Determinați câte numere naturale de trei cifre distincte se pot forma cu elementele mulțimii $\{1,2,3,4,5\}$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,6)$ și $B(6,2)$. Determinaţi coordonatele punctului M, știind că $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MB}$.

5p **6.** Se consideră triunghiul ABC cu $AB=3\sqrt{3}$, $AC=4$ și $A=\frac{2\pi}{3}$. Arătaţi că aria triunghiului ABC este egală cu 9.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & -a & -1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} ax+y+z=1 \\ x-ay-z=1 \\ x+y+az=2 \end{cases}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(0))=0$.

5p **b)** Demonstrați că $\det(A(a))=a(1-a)(1+$ SESIUNE VARĂ număr real a.

5p **c)** Pentru $a=0$, demonstrați că sistemul de ecuații are o infinitate de soluții de forma (x_0,y_0,z_0) cu x_0, y_0 și z_0 numere întregi.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=(x-2019)(y-2019)+2019$.

5p **a)** Arătați că $x*2019=2019$, pentru orice număr real x.

5p **b)** Determinați numerele reale x, știind că $(x*x)*x=x$.

5p **c)** Determinaţi perechile de numere întregi m și n pentru care $m*n=2020$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x}-\ln x$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{\sqrt{x}-2}{2x}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f, în punctul de abscisă $x=1$, situat pe graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că $\sqrt{x}-\ln\frac{x}{4}\geq2$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2}{x^2+9}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1 (x^2+9)f(x)\,dx=\frac{1}{3}$.

5p **b)** Demonstrați că orice primitivă a funcției f are un singur punct de inflexiune.

5p **c)** Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră $I_n=\int_0^1 x^{2n}f(x)\,dx$. Arătați că $\lim_{n\to+\infty} I_n=0$.

Examenul de bacalaureat naţional 2019
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$q=3 \Rightarrow b_3=9$ $b_1+b_2+b_3=1+3+9=13$	**3p** **2p**
2.	$x_1+x_2=-m$, $x_1x_2=7$ $-2m+21=1$, deci $m=10$	**2p** **3p**
3.	$(x-2)(x+2)=2^5 \Rightarrow x^2-36=0$ $x=-6$, care nu convine, $x=6$, care convine	**3p** **2p**
4.	Prima cifră se poate alege în 5 moduri Pentru fiecare alegere a primei cifre, a doua cifră se poate alege în câte 4 moduri Pentru fiecare alegere a primelor două cifre, a treia cifră se poate alege în câte 3 moduri, deci se pot forma $5\cdot 4\cdot 3=60$ de numere	**1p** **1p** **3p**
5.	Punctul M este mijlocul segmentului AB $x_M=4$, $y_M=4$	**3p** **2p**
6.	$\mathcal{A}_{\Delta ABC}=\dfrac{AB\cdot AC\cdot\sin\frac{2\pi}{3}}{2}=\dfrac{3\sqrt{3}\cdot 4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}=$ $=\dfrac{12\cdot 3}{4}=9$	**3p** **2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(0)=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&-1\\1&1&0\end{pmatrix}\Rightarrow \det(A(0))=\begin{vmatrix}0&1&1\\1&0&-1\\1&1&0\end{vmatrix}=$ $=0+1+(-1)-0-0-0=0$	**2p** **3p**
b)	$\det(A(a))=\begin{vmatrix}a&1&1\\1&-a&-1\\1&1&a\end{vmatrix}=-a^3+a=$ $=a\left(1-a^2\right)=a(1-a)(1+a)$, pentru orice număr real a	**3p** **2p**
c)	Pentru $a=0$, sistemul este compatibil nedeterminat și soluțiile sistemului sunt de forma $(1+\alpha,1-\alpha,\alpha)$, unde $\alpha\in\mathbb{R}$ Pentru orice α număr întreg, numerele $x_0=1+\alpha$, $y_0=1-\alpha$ și $z_0=\alpha$ sunt întregi	**3p** **2p**
2.a)	$x*2019=(x-2019)(2019-2019)+2019=$ $=0+2019=2019$, pentru orice număr real x	**3p** **2p**

b)	$x*x=(x-2019)^2+2019$, $(x*x)*x=(x-2019)^3+2019$	**2p**
	$(x-2019)^3+2019=x \Leftrightarrow (x-2019)\left((x-2019)^2-1\right)=0$, deci $x=2018$ sau $x=2019$ sau $x=2020$	**3p**
c)	$(m-2019)(n-2019)+2019=2020 \Leftrightarrow (m-2019)(n-2019)=1$	**2p**
	Cum m și n sunt numere întregi, obținem $m=2018$, $n=2018$ sau $m=2020$, $n=2020$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{x}=$	**3p**
	$=\frac{\sqrt{x}}{2x}-\frac{1}{x}=\frac{\sqrt{x}-2}{2x}$, $x\in(0,+\infty)$	**2p**
b)	$f(1)=1$, $f'(1)=-\frac{1}{2}$	**2p**
	Ecuația tangentei este $y-f(1)=f'(1)(x-1)$, adică $y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$	**3p**
c)	$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=4$	**1p**
	$x\in(0,4] \Rightarrow f'(x)\le 0$, deci f descrescătoare pe $(0,4]$ și $x\in[4,+\infty) \Rightarrow f'(x)\ge 0$, deci f este crescătoare pe $[4,+\infty)$	**2p**
	Cum $f(4)=2-\ln 4$, obținem $f(x)\ge 2-\ln 4$, deci $\sqrt{x}-\ln\frac{x}{4}\ge 2$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$	**2p**
2.a)	$\int_0^1 (x^2+9)f(x)dx=\int_0^1 x^2dx=\left.\frac{x^3}{3}\right\|_0^1=$	**3p**
	$=\frac{1}{3}-0=\frac{1}{3}$	**2p**
b)	$F'(x)=f(x)=\frac{x^2}{x^2+9}$, $F''(x)=f'(x)=\frac{18x}{(x^2+9)^2}$, $x\in\mathbb{R}$, unde funcția $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este o primitivă a lui f	**2p**
	$F''(x)=0 \Leftrightarrow x=0$	**1p**
	$x\in(-\infty,0) \Rightarrow F''(x)<0$ și $x\in(0,+\infty) \Rightarrow F''(x)>0$, deci F are un singur punct de inflexiune	**2p**
c)	$x\in[0,1] \Rightarrow x^{2n}\ge 0$ și, cum $0\le f(x)\le 1$, obținem $0\le x^{2n}f(x)\le x^{2n}$	**2p**
	$0\le I_n=\int_0^1 x^{2n}f(x)dx\le\int_0^1 x^{2n}dx=\left.\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right\|_0^1=\frac{1}{2n+1}$ și $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2n+1}=0$, deci $\lim_{n\to+\infty}I_n=0$	**3p**