# Examenul de bacalaureat național 2019
## Proba E. c)
## Matematică *M_mate-info*

SESIUNE SPECIALĂ

**Varianta 8**

***Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică***
***Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică***

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

**SUBIECTUL I** **(30 de puncte)**

**5p** **1.** Se consideră numerele complexe $z_1 = 3 - i$ și $z_2 = 8 - 3i$. Arătați că $3z_1 - z_2 = 1$.

**5p** **2.** Determinați numărul real $a$ pentru care $f(a) + f(a+1) = 35$, unde $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - 5$.

**5p** **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2 \cdot 4^x - 4^{x+1} + 32 = 0$.

**5p** **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr $n$ din mulțimea numerelor naturale de o cifră, acesta să verifice relația $n(n+1) \geq 42$.

**5p** **5.** În reperul cartezian $xOy$ se consideră punctele $A(8,4)$, $B(0,6)$ și $C(m,5)$. Determinați numărul real $m$, știind că $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$.

**5p** **6.** Calculați lungimea ipotenuzei $BC$ a triunghiului dreptunghic $ABC$, știind că $AB = 6$ și aria triunghiului $ABC$ este egală cu $24$.

**SUBIECTUL al II-lea** **(30 de puncte)**

**1.** Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} a+1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ln(a+1) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, unde $a$ este număr real, $a > 0$.

**5p** **a)** Arătați că $\det(A(1)) = 2$.

**5p** **b)** Demonstrați că $A(a)A(b) = A(ab + a + b)$, pentru orice numere reale $a$ și $b$, $a > 0$, $b > 0$.

**5p** **c)** Determinați numărul real $a$, $a > 0$, știind că $A(a)A(a)A(a) = A(7)$.

**2.** Se consideră $x_1$, $x_2$, $x_3$ rădăcinile polinomului $f = X^3 + mX^2 - mX + 2$, unde $m$ este număr real.

**5p** **a)** Determinați numărul real $m$, știind că $f(-2) = 0$.

**5p** **b)** Pentru $m = 1$, determinați rădăcinile polinomului $f$.

**5p** **c)** Se consideră $a = \dfrac{x_1^2 + mx_1}{x_2 x_3} + \dfrac{x_2^2 + mx_2}{x_1 x_3} + \dfrac{x_3^2 + mx_3}{x_1 x_2}$. Demonstrați că $a \in [3, +\infty)$, pentru orice număr real $m$.

**SUBIECTUL al III-lea** **(30 de puncte)**

**1.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x(x^2 + 4x + 1)$.

**5p** **a)** Arătați că $f'(x) = e^x(x+5)(x+1)$, $x \in \mathbb{R}$.

**5p** **b)** Determinați abscisele punctelor situate pe graficul funcției $f$, în care tangenta la graficul funcției $f$ este paralelă cu axa $Ox$.

**5p** **c)** Determinați valorile reale ale lui $a$ pentru care ecuația $f(x) = a$ are exact trei soluții reale.

**2.** Se consideră funcția $f:(1, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{\ln x}$.

**5p** **a)** Arătați că orice primitivă a funcției $f$ este strict crescătoare pe intervalul $(1, +\infty)$.

**5p** **b)** Calculați $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{1}{x} f(x)\,dx$.

**5p** **c)** Determinați numărul real $a$, $a > e$, știind că suprafața plană delimitată de graficul funcției $g:(1, +\infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$, axa $Ox$ și dreptele de ecuații $x = e$ și $x = a$ are aria egală cu $2a$.

**Examenul de bacalaureat național 2019**
**Proba E. c)**
**Matematică *M_mate-info***

**BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE**

**Varianta 8**

***Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică***
***Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică***

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

**SUBIECTUL I (30 de puncte)**

| | | |
|---|---|---|
| **1.** | $3z_1 - z_2 = 3(3-i)-(8-3i)=$ | **2p** |
| | $=9-3i-8+3i=1$ | **3p** |
| **2.** | $a-5+(a+1)-5=35$ | **2p** |
| | $2a-9=35 \Rightarrow a=22$ | **3p** |
| **3.** | $4^x(2-4)+32=0 \Leftrightarrow 4^x=16$ | **3p** |
| | $x=2$ | **2p** |
| **4.** | Mulțimea numerelor naturale de o cifră are $10$ elemente, deci sunt $10$ cazuri posibile | **2p** |
| | Numerele naturale de o cifră care verifică relația sunt $6$, $7$, $8$ și $9$, deci sunt $4$ cazuri favorabile | **2p** |
| | $p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{4}{10}=\dfrac{2}{5}$ | **1p** |
| **5.** | $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}$, deci punctul $C$ este mijlocul segmentului $AB$ | **2p** |
| | $m=4$ | **3p** |
| **6.** | $\mathcal{A}_{\Delta ABC}=\dfrac{AB\cdot AC}{2}\Rightarrow 24=\dfrac{6\cdot AC}{2}\Rightarrow AC=8$ | **3p** |
| | $BC=10$ | **2p** |

**SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)**

| | | |
|---|---|---|
| **1.a)** | $A(1)=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&\ln 2\\0&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow \det(A(1))=\begin{vmatrix}2&0&0\\0&1&\ln 2\\0&0&1\end{vmatrix}=$ | **2p** |
| | $=2+0+0-0-0-0=2$ | **3p** |
| **b)** | $A(a)A(b)=\begin{pmatrix}(a+1)(b+1)&0&0\\0&1&\ln((a+1)(b+1))\\0&0&1\end{pmatrix}=$ | **3p** |
| | $=\begin{pmatrix}(ab+a+b)+1&0&0\\0&1&\ln((ab+a+b)+1)\\0&0&1\end{pmatrix}=A(ab+a+b)$, pentru orice numere reale $a$ și $b$, $a>0$, $b>0$ | **2p** |
| **c)** | $A(a)A(a)=A\left((a+1)^2-1\right)$, $A(a)A(a)A(a)=A\left((a+1)^3-1\right)$, pentru $a$ număr real, $a>0$ | **2p** |
| | $(a+1)^3-1=7 \Leftrightarrow (a+1)^3=8$, deci $a=1$ | **3p** |
| **2.a)** | $f(-2)=6m-6$, pentru $m$ număr real | **3p** |
| | $6m-6=0\Rightarrow m=1$ | **2p** |

| | | |
|---|---|---|
| **b)** | $f=X^3+X^2-X+2=(X+2)\left(X^2-X+1\right)$ | **2p** |
| | $x_1=-2$, $x_2=\frac{1-i\sqrt{3}}{2}$, $x_3=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ | **3p** |
| **c)** | $x_1+x_2+x_3=-m$, $x_1x_2x_3=-2$ | **2p** |
| | $a=\frac{x_1^3+mx_1^2}{x_1x_2x_3}+\frac{x_2^3+mx_2^2}{x_1x_2x_3}+\frac{x_3^3+mx_3^2}{x_1x_2x_3}=\frac{mx_1-2}{x_1x_2x_3}+\frac{mx_2-2}{x_1x_2x_3}+\frac{mx_3-2}{x_1x_2x_3}=\frac{m(x_1+x_2+x_3)-6}{x_1x_2x_3}=$ $=\frac{m^2+6}{2}\geq 3$, deci $a\in[3,+\infty)$, pentru orice număr real $m$ | **3p** |

**SUBIECTUL al III-lea** **(30 de puncte)**

| | | |
|---|---|---|
| **1.a)** | $f'(x)=e^x\left(x^2+4x+1\right)+e^x(2x+4)=$ | **3p** |
| | $=e^x\left(x^2+6x+5\right)=e^x(x+5)(x+1)$, $x\in\mathbb{R}$ | **2p** |
| **b)** | Tangenta la graficul funcției $f$ în $(x_0,f(x_0))$ este paralelă cu axa $Ox \Leftrightarrow f'(x_0)=0$ | **2p** |
| | $e^{x_0}(x_0+5)(x_0+1)=0 \Leftrightarrow x_0=-5$ sau $x_0=-1$ | **3p** |
| **c)** | $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$, $f(-5)=\frac{6}{e^5}$, $f(-1)=-\frac{2}{e}$ și $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ | **2p** |
| | Cum $f$ este continuă pe $\mathbb{R}$ și $f$ este strict monotonă pe $(-\infty,-5)$, pe $(-5,-1)$ și pe $(-1,+\infty)$, ecuația $f(x)=a$ are exact trei soluții reale $\Leftrightarrow a\in\left(0,\frac{6}{e^5}\right)$ | **3p** |
| **2.a)** | $F$ este o primitivă a funcției $f \Rightarrow F'(x)=f(x)=\frac{1}{\ln x}$, $x\in(1,+\infty)$ | **2p** |
| | $F'(x)>0$, pentru orice $x\in(1,+\infty)$, deci $F$ este strict crescătoare pe intervalul $(1,+\infty)$ | **3p** |
| **b)** | $\int_e^{e^2}\frac{1}{x}f(x)dx=\int_e^{e^2}\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\ln x}dx=\ln(\ln x)\Big\|_e^{e^2}=$ | **3p** |
| | $=\ln 2-\ln 1=\ln 2$ | **2p** |
| **c)** | $g(x)=\ln x \Rightarrow \mathcal{A}=\int_e^a\|g(x)\|dx=\int_e^a \ln x\,dx=x\ln x\Big\|_e^a-\int_e^a x\cdot\frac{1}{x}dx=a\ln a-a$ | **3p** |
| | $a\ln a-a=2a$ și, cum $a>e$, obținem $a=e^3$ | **2p** |