Examenul de bacalaureat național 2019
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Clasa a XII-a

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Determinați numărul complex z, știind că $3z+2\overline{z}=5+2i$, unde $\overline{z}$ este conjugatul lui z.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+a$, unde a este număr real. Determinați numărul real a pentru care $(f\circ f\circ f)(x)=x+3$, pentru orice număr real x.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_3(2x+3)-\log_3 x=1$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să se dividă cu 10.

5p **5.** Determinați numărul real a pentru care vectorii $\vec{u}=(a+1)\vec{i}+(5a-1)\vec{j}$ și $\vec{v}=\vec{i}+3\vec{j}$ sunt coliniari.

5p **6.** Calculați aria triunghiului ABC, știind că $AB=6$, $AC=10$ și $\cos A=\frac{3}{5}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $M(x)=\begin{pmatrix} x+1 & 0 & x+2 \\ 0 & x & 0 \\ 3-x & 0 & 4-x \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Calculați $\det(M(-1))$.

5p **b)** Demonstrați că $M(x)+M(y)=M(0)+M(x+y)$, pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Determinați perechile de numere naturale m și n, știind că suma elementelor matricei $M(m)\cdot M(1)$ este egală cu suma elementelor matricei $M(1)\cdot M(n)$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=4x+4y-4xy-3$.

5p **a)** Demonstrați că $x*y=1-4(x-1)(y-1)$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Arătați că $x*\frac{1}{x}\geq 1$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.

5p **c)** Determinați numerele reale x pentru care $x*x*x*x=x$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=5\ln x-x^2-3x$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{(1-x)(2x+5)}{x}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Demonstrați că funcția f este concavă pe $(0,+\infty)$.

5p **c)** Demonstrați că $5\ln x\leq x^2+3x-4$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\left(x^2+4x+5\right)e^x$.

5p **a)** Demonstrați că orice primitivă a funcției f este crescătoare pe $\mathbb{R}$.

5p **b)** Calculați $\int_0^1\left(f(x)-x^2e^x-5e^x\right)dx$.

5p **c)** Demonstrați că $\frac{e^2-1}{e^3}\leq\int_{-3}^{-1}f(x)\,dx\leq\frac{2\left(e^2-1\right)}{e^3}$.

Examenul de bacalaureat național 2019
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Clasa a XII-a

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$3(a+ib)+2(a-ib)=5+2i \Leftrightarrow 5a+ib=5+2i$, unde $z=a+ib$ cu a și b numere reale	**3p**
	$a=1$ și $b=2$, deci $z=1+2i$	**2p**
2.	$(f\circ f)(x)=f(x+a)=x+2a$, $(f\circ f\circ f)(x)=x+3a$	**3p**
	$x+3a=x+3$, pentru orice număr real x, deci $a=1$	**2p**
3.	$\log_3\frac{2x+3}{x}=1\Rightarrow\frac{2x+3}{x}=3$	**3p**
	$2x+3=3x\Rightarrow x=3$, care convine	**2p**
4.	Sunt 900 de numere naturale de trei cifre, deci sunt 900 de cazuri posibile	**1p**
	Sunt 90 de numere naturale de trei cifre care se divid cu 10, deci sunt 90 de cazuri favorabile	**2p**
	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{1}{10}$	**2p**
5.	$\frac{a+1}{1}=\frac{5a-1}{3}\Leftrightarrow 3a+3=5a-1$	**3p**
	$a=2$	**2p**
6.	$\sin A=\frac{4}{5}$	**2p**
	$\mathcal{A}_{\Delta ABC}=\frac{AB\cdot AC\cdot\sin A}{2}=\frac{6\cdot 10\cdot\frac{4}{5}}{2}=24$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$M(-1)=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&-1&0\\4&0&5\end{pmatrix}\Rightarrow\det(M(-1))=\begin{vmatrix}0&0&1\\0&-1&0\\4&0&5\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=0+0+0-(-4)-0-0=4$	**3p**
b)	$M(x)+M(y)=\begin{pmatrix}x+1&0&x+2\\0&x&0\\3-x&0&4-x\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}y+1&0&y+2\\0&y&0\\3-y&0&4-y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+y+2&0&x+y+4\\0&x+y&0\\6-x-y&0&8-x-y\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&0&0\\3&0&4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}(x+y)+1&0&(x+y)+2\\0&x+y&0\\3-(x+y)&0&4-(x+y)\end{pmatrix}=M(0)+M(x+y)$, pentru orice numere reale x și y	**2p**

c)	$M(m)\cdot M(1)=\begin{pmatrix}4m+6 & 0 & 6m+9\\ 0 & m & 0\\ 14-4m & 0 & 21-6m\end{pmatrix}$, $M(1)\cdot M(n)=\begin{pmatrix}11-n & 0 & 16-n\\ 0 & n & 0\\ 11-n & 0 & 16-n\end{pmatrix}$, unde m și n sunt numere naturale	**2p**
	$50+m=54-3n \Leftrightarrow m+3n=4$ și, cum m și n sunt numere naturale, obținem $m=1$, $n=1$ sau $m=4$, $n=0$	**3p**
2.a)	$x*y=1-4xy+4x+4y-4=$	**3p**
	$=1-4x(y-1)+4(y-1)=1-4(x-1)(y-1)$, pentru orice numere reale x și y	**2p**
b)	$x*\dfrac{1}{x}=1-4(x-1)\left(\dfrac{1}{x}-1\right)=1-4(x-1)\cdot\dfrac{1-x}{x}=$	**3p**
	$=1+\dfrac{4(x-1)^2}{x}\geq 1$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$	**2p**
c)	$x*x=1-4(x-1)^2$, $x*x*x=1+4^2(x-1)^3$, $x*x*x*x=1-4^3(x-1)^4$, unde x este număr real	**3p**
	$(x-1)\left(1+4^3(x-1)^3\right)=0$, deci $x=\dfrac{3}{4}$ sau $x=1$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=5\cdot\dfrac{1}{x}-2x-3=$	**3p**
	$=\dfrac{-2x^2-3x+5}{x}=\dfrac{(1-x)(2x+5)}{x}$, $x\in(0,+\infty)$	**2p**
b)	$f''(x)=\dfrac{-2x^2-5}{x^2}$, $x\in(0,+\infty)$	**2p**
	$f''(x)<0$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$, deci funcția f este concavă pe $(0,+\infty)$	**3p**
c)	f este crescătoare pe $(0,1]$ și descrescătoare pe $[1,+\infty)$, deci $f(x)\leq f(1)$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$	**3p**
	$f(1)=-4 \Rightarrow 5\ln x-x^2-3x\leq -4$, deci $5\ln x\leq x^2+3x-4$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$	**2p**
2.a)	F este o primitivă a funcției $f \Rightarrow F'(x)=f(x)=\left(x^2+4x+5\right)e^x$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
	$f(x)>0 \Rightarrow F'(x)>0$, pentru orice număr real x, deci funcţia F este crescătoare pe $\mathbb{R}$	**3p**
b)	$\displaystyle\int_0^1\left(\left(x^2+4x+5\right)e^x-x^2e^x-5e^x\right)dx=\int_0^1 4xe^x dx=4(x-1)e^x\Big\|_0^1=$	**3p**
	$=0-4\cdot(-1)=4$	**2p**
c)	Pentru orice $x\in[-3,-1]$, obținem $1\leq x^2+4x+5\leq 2$, deci $e^x\leq f(x)\leq 2e^x$	**2p**
	$\displaystyle\int_{-3}^{-1}e^x\,dx\leq\int_{-3}^{-1}f(x)dx\leq 2\int_{-3}^{-1}e^x\,dx$ și, cum $\displaystyle\int_{-3}^{-1}e^x dx=\frac{e^2-1}{e^3}\Rightarrow\frac{e^2-1}{e^3}\leq\int_{-3}^{-1}f(x)dx\leq\frac{2\left(e^2-1\right)}{e^3}$	**3p**