

Examenul de bacalaureat național 2019

Proba E. c)

Matematică M_{st-nat}

SESIUNE VARĂ

Varianta 6

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Determinați termenul b_3 al progresiei geometrice $(b_n)_{n \geq 1}$, știind că $b_1 = 1$ și rația $q = 5$.
- 5p** 2. Se consideră funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - x + 1$ și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 4x - 5$. Determinați abscisele punctelor de intersecție a graficelor celor două funcții.
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{2x} + x = 4$.
- 5p** 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $A = \{\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \dots, \sqrt{49}\}$, acesta să fie număr natural.
- 5p** 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,3)$, $B(-3,0)$ și $C(-3,6)$. Determinați ecuația medianei din A a triunghiului ABC .
- 5p** 6. Arătați că $\sin x(3\sin x - \cos x) + \cos x(\sin x + 3\cos x) = 3$, pentru orice număr real x .

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} a & 4 \\ -4 & a \end{pmatrix}$, unde a este număr real.
- 5p** a) Arătați că $\det(A(-1)) = 17$.
- 5p** b) Demonstrați că $A(2019 - a) + A(2019 + a) = 2A(2019)$, pentru orice număr real a .
- 5p** c) Determinați perechile de numere reale x și y , pentru care $A(x)A(y) = 2A(-8)$.
2. Pe mulțimea $G = (-2, 2)$ se definește legea de compoziție $x * y = \frac{4x + 4y}{4 + xy}$.
- 5p** a) Arătați că 0 este elementul neutru al legii de compoziție „*”.
- 5p** b) Determinați $x \in G$, pentru care $x * x = \frac{8}{5}$.
- 5p** c) Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow G$, $f(x) = \frac{2(x-1)}{x+1}$. Demonstrați că $f(xy) = f(x) * f(y)$, pentru orice $x, y \in (0, +\infty)$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1 - 2x + 2\ln(x+1)$.
- 5p** a) Arătați că $f'(x) = \frac{-2x}{x+1}$, $x \in (-1, +\infty)$.
- 5p** b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x = 0$, situat pe graficul funcției f .
- 5p** c) Demonstrați că $\ln(1 + \cos x) \leq \cos x$, pentru orice $x \in (0, \pi)$.
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x+3}{e^x}$.
- 5p** a) Arătați că $\int_{-1}^1 f(x)e^x dx = 6$.
- 5p** b) Demonstrați că orice primitivă a funcției f este crescătoare pe intervalul $[-3, +\infty)$.
- 5p** c) Determinați numărul natural nenul n , știind că suprafața plană delimitată de graficul funcției f , axa Ox și dreptele de ecuații $x = 0$ și $x = n$ are aria egală cu $4 - 6e^{-n}$.

Examenul de bacalaureat național 2019
Proba E. c)
Matematică *M_șt-nat*
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianta 6

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$b_3 = b_1 \cdot q^2 =$ $= 1 \cdot 5^2 = 25$	3p 2p
2.	$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 - x + 1 = 4x - 5 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$ $x = 2, x = 3$	2p 3p
3.	$\sqrt{2x} = 4 - x \Rightarrow 2x = 16 - 8x + x^2 \Rightarrow x^2 - 10x + 16 = 0$ $x = 2$, care convine, $x = 8$, care nu convine	3p 2p
4.	Mulțimea A are 49 de elemente, deci sunt 49 de cazuri posibile În mulțimea A sunt 7 numere naturale, deci sunt 7 cazuri favorabile $p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{7}{49} = \frac{1}{7}$	2p 2p 1p
5.	Punctul $M(-3, 3)$ este mijlocul laturii BC Ecuația medianei din A este $y = 3$	2p 3p
6.	$\sin x(3\sin x - \cos x) + \cos x(\sin x + 3\cos x) = 3\sin^2 x - \sin x \cos x + \cos x \sin x + 3\cos^2 x =$ $= 3(\sin^2 x + \cos^2 x) = 3$, pentru orice număr real x	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$A(-1) = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -4 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(-1)) = \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -4 & -1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-1) - (-4) \cdot 4 =$ $= 1 + 16 = 17$	3p 2p
b)	$A(2019 - a) + A(2019 + a) = \begin{pmatrix} 2019 - a & 4 \\ -4 & 2019 - a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2019 + a & 4 \\ -4 & 2019 + a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4038 & 8 \\ -8 & 4038 \end{pmatrix} =$ $= 2 \begin{pmatrix} 2019 & 4 \\ -4 & 2019 \end{pmatrix} = 2A(2019)$, pentru orice număr real a	3p 2p
c)	$A(x)A(y) = \begin{pmatrix} x & 4 \\ -4 & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y & 4 \\ -4 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xy - 16 & 4x + 4y \\ -4x - 4y & xy - 16 \end{pmatrix}$, $2A(-8) = \begin{pmatrix} -16 & 8 \\ -8 & -16 \end{pmatrix}$ $xy = 0$ și $x + y = 2$, deci $x = 0$, $y = 2$ sau $x = 2$, $y = 0$	3p 2p
2.a)	$x * 0 = \frac{4x + 4 \cdot 0}{4 + x \cdot 0} = \frac{4x}{4} = x$, pentru orice $x \in G$ $0 * x = \frac{4 \cdot 0 + 4 \cdot x}{4 + 0 \cdot x} = \frac{4x}{4} = x$, pentru orice $x \in G$, deci 0 este elementul neutru al legii de compoziție „*”	2p 3p
b)	$\frac{8x}{4 + x^2} = \frac{8}{5} \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0$ $x = 1$, care convine, $x = 4$, care nu convine	3p 2p

c)	$f(x) * f(y) = \frac{4f(x) + 4f(y)}{4 + f(x)f(y)} = \frac{4 \cdot \frac{2(x-1)}{x+1} + 4 \cdot \frac{2(y-1)}{y+1}}{4 + \frac{4(x-1)(y-1)}{(x+1)(y+1)}} = \frac{2(xy + x - y - 1 + xy - x + y - 1)}{xy + x + y + 1 + xy - x - y + 1} =$ $= \frac{4(xy - 1)}{2(xy + 1)} = \frac{2(xy - 1)}{xy + 1} = f(xy), \text{ pentru orice } x, y \in (0, +\infty)$	<p>3p</p> <p>2p</p>
----	--	---------------------

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = -2 + \frac{2}{x+1} =$ $= \frac{-2x - 2 + 2}{x+1} = \frac{-2x}{x+1}, x \in (-1, +\infty)$	<p>3p</p> <p>2p</p>
b)	$f(0) = 1, f'(0) = 0$ Ecuația tangentei este $y - f(0) = f'(0)(x - 0)$, adică $y = 1$	<p>2p</p> <p>3p</p>
c)	$f'(x) \geq 0$, pentru orice $x \in (-1, 0] \Rightarrow f$ este crescătoare pe $(-1, 0]$ și $f'(x) \leq 0$, pentru orice $x \in [0, +\infty) \Rightarrow f$ este descrescătoare pe $[0, +\infty)$, deci $f(x) \leq f(0) \Rightarrow 1 - 2x + 2 \ln(x+1) \leq 1$, deci $\ln(x+1) \leq x$, pentru orice $x \in (-1, +\infty)$ $\cos x > -1$, pentru orice $x \in (0, \pi)$, deci $\ln(1 + \cos x) \leq \cos x$, pentru orice $x \in (0, \pi)$	<p>3p</p> <p>2p</p>
2.a)	$\int_{-1}^1 f(x) e^x dx = \int_{-1}^1 (x+3) dx = \left(\frac{x^2}{2} + 3x \right) \Big _{-1}^1 =$ $= \left(\frac{1}{2} + 3 \right) - \left(\frac{1}{2} - 3 \right) = 6$	<p>3p</p> <p>2p</p>
b)	F este o primitivă a funcției $f \Rightarrow F'(x) = f(x) = \frac{x+3}{e^x}, x \in \mathbb{R}$ $F'(x) \geq 0$, pentru orice $x \in [-3, +\infty)$, deci funcția F este crescătoare pe intervalul $[-3, +\infty)$	<p>2p</p> <p>3p</p>
c)	$\mathcal{A} = \int_0^n f(x) dx = \int_0^n (x+3) e^{-x} dx = -(x+4) e^{-x} \Big _0^n = -(n+4) e^{-n} + 4$ $-(n+4) e^{-n} + 4 = 4 - 6e^{-n}$, de unde obținem $n = 2$	<p>3p</p> <p>2p</p>