Examenul de bacalaureat național 2019
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Model

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I – Scrieți, pe foaia de examen, rezolvările complete. (30 de puncte)

5p **1.** Arătați că numărul $N=(4+3i)^2+(3-4i)^2$ este natural, unde $i^2=-1$.

5p **2.** Determinați numerele reale a, știind că punctul $A(a,a)$ aparține graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2-x^2$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $5^x+5^{x+1}=30$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $M=\left\{\sqrt{1},\sqrt{2},\sqrt{3},\ldots,\sqrt{49}\right\}$, acesta să fie număr natural.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,5)$, $B(3,5)$ și $C(2,1)$. Determinați lungimea medianei din B a triunghiului ABC.

5p **6.** Demonstrați că $(\sin x+\cos x)^2+(\sin x-\cos x)^2=2$, pentru orice număr real x.

SUBIECTUL al II-lea – Scrieți, pe foaia de examen, rezolvările complete. (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(x,y)=\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$, unde x și y sunt numere reale.

5p **a)** Arătați că $\det\left(A(1,1)\right)=2$.

5p **b)** Determinați numărul natural n pentru care $A(n-1,0)+A(n+1,0)=A(2018,0)$.

5p **c)** Determinați numărul real a, știind că există un număr real x pentru care $A(x,1)\cdot A(x,1)=A(a,-2)$.

2. Se consideră polinomul $f=X^3-7X^2+mX-8$, unde m este număr real.

5p **a)** Arătați că $f(-1)+f(1)=-30$, pentru orice număr real m.

5p **b)** Determinați câtul și restul împărțirii polinomului f la X^2-3X+1, știind că f se divide cu $X-2$.

5p **c)** Determinați numărul real m pentru care polinomul f are trei rădăcini reale pozitive, în progresie geometrică.

SUBIECTUL al III-lea – Scrieți, pe foaia de examen, rezolvările complete. (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:(-2,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2+2x+1}{x+2}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{(x+1)(x+3)}{(x+2)^2}$, $x\in(-2,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că funcția f este convexă pe $(-2,+\infty)$.

2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+\dfrac{1}{x}$.

5p **a)** Determinați primitiva F a funcției f pentru care $F(1)=0$.

5p **b)** Arătați că volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g:[1,2]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)$ este egal cu $\dfrac{97\pi}{10}$.

5p **c)** Determinați numărul $m\in(1,+\infty)$, știind că $\displaystyle\int_1^m\left(f(x)-x^2\right)\ln x\,dx=\frac{1}{2}$.

Examenul de bacalaureat naţional 2019
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Model

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$N=16+24i+9i^2+9-24i+16i^2=$	**2p**
	$=16-9+9-16=0$, care este număr natural	**3p**
2.	$f(a)=a\Leftrightarrow 2-a^2=a\Leftrightarrow a^2+a-2=0$	**3p**
	$a=-2$ sau $a=1$	**2p**
3.	$5^x(1+5)=30\Leftrightarrow 5^x=5$	**3p**
	$x=1$	**2p**
4.	Mulțimea M are 49 de elemente, deci sunt 49 de cazuri posibile	**1p**
	În mulțimea M sunt 7 numere naturale, deci sunt 7 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{7}{49}=\dfrac{1}{7}$	**2p**
5.	Mijlocul segmentului AC este punctul $M(2,3)$	**2p**
	$BM=\sqrt{(3-2)^2+(5-3)^2}=\sqrt{5}$	**3p**
6.	$(\sin x+\cos x)^2+(\sin x-\cos x)^2=\sin^2x+2\sin x\cos x+\cos^2x+\sin^2x-2\sin x\cos x+\cos^2x=$	**2p**
	$=2\left(\sin^2x+\cos^2x\right)=2\cdot 1=2$, pentru orice număr real x	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(1,1)=\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}\Rightarrow \det(A(1,1))=\begin{vmatrix}1&-1\\1&1\end{vmatrix}=1\cdot 1-1\cdot(-1)=$	**3p**
	$=1+1=2$	**2p**
b)	$\begin{pmatrix}n-1&0\\0&n-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}n+1&0\\0&n+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2018&0\\0&2018\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}2n&0\\0&2n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2018&0\\0&2018\end{pmatrix}$	**3p**
	$n=1009$	**2p**
c)	$\begin{pmatrix}x&-1\\1&x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x&-1\\1&x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&2\\-2&a\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x^2-1&-2x\\2x&x^2-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&2\\-2&a\end{pmatrix}$	**3p**
	$x=-1$, de unde obținem $a=0$	**2p**
2.a)	$f(-1)=(-1)^3-7\cdot(-1)^2+m\cdot(-1)-8=-m-16$	**2p**
	$f(1)=1^3-7\cdot 1^2+m\cdot 1-8=m-14\Rightarrow f(-1)+f(1)=-m-16+m-14=-30$, pentru orice număr real m	**3p**
b)	$f(2)=0\Rightarrow m=14$, deci $f=X^3-7X^2+14X-8$	**2p**
	Câtul este $X-4$ și restul este $X-4$	**3p**
c)	$x_1x_3=x_2^2\Rightarrow x_1x_2x_3=x_2^3$ și, cum $x_1x_2x_3=8$, obținem $x_2=2$	**2p**
	Polinomul f are rădăcinile 1, 2 și 4, deci $m=14$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{(2x+2)(x+2)-\left(x^2+2x+1\right)\cdot 1}{(x+2)^2}=$	**3p**
	$=\dfrac{x^2+4x+3}{(x+2)^2}=\dfrac{(x+1)(x+3)}{(x+2)^2}$, $x\in(-2,+\infty)$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+2x+1}{x(x+2)}=1$	**2p**
	$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x+2}=0$, deci dreapta de ecuație $y=x$ este asimptotă oblică spre $+\infty$ la graficul funcției f	**3p**
c)	$f''(x)=\dfrac{2}{(x+2)^3}$, $x\in(-2,+\infty)$	**2p**
	$f''(x)>0$, pentru orice $x\in(-2,+\infty)$, deci funcția f este convexă pe $(-2,+\infty)$	**3p**
2.a)	$F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=\dfrac{x^3}{3}+\ln x+c$, unde $c\in\mathbb{R}$	**3p**
	Cum $F(1)=\dfrac{1}{3}+c$, obținem $F(1)=0\Leftrightarrow c=-\dfrac{1}{3}$, deci $F(x)=\dfrac{x^3}{3}+\ln x-\dfrac{1}{3}$	**2p**
b)	$g(x)=x^2+\dfrac{1}{x}\Rightarrow V=\pi\int\limits_1^2 g^2(x)\,dx=\pi\int\limits_1^2\left(x^4+2x+\dfrac{1}{x^2}\right)dx=\pi\cdot\left(\dfrac{x^5}{5}+x^2-\dfrac{1}{x}\right)\Big\|_1^2=$	**3p**
	$=\pi\left(\dfrac{32}{5}+4-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{5}-1+1\right)=\dfrac{97\pi}{10}$	**2p**
c)	$\int\limits_1^m\left(f(x)-x^2\right)\ln x\,dx=\int\limits_1^m\dfrac{1}{x}\ln x\,dx=\dfrac{1}{2}\ln^2 x\Big\|_1^m=\dfrac{1}{2}\ln^2 m$	**3p**
	$\dfrac{1}{2}\ln^2 m=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow\ln m=-1$ sau $\ln m=1$, deci $m=\dfrac{1}{e}$, care nu convine sau $m=e$, care convine	**2p**