Examenul de bacalaureat naţional 2019
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

SESIUNE VARĂ

Varianta 6

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Arătați că $\sqrt{7}\left(\sqrt{7}+1\right)-\sqrt{7}=7$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-6x+8$. Determinați coordonatele punctului de intersecție a graficului funcției f cu axa Oy.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_5\left(x^2+9\right)=2$.

5p **4.** După o ieftinire cu 40%, preţul unui obiect este 300 de lei. Calculați prețul obiectului înainte de ieftinire.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,2)$, $B(-3,2)$ şi $C(0,6)$. Determinaţi, în triunghiul ABC, lungimea medianei din vârful C.

5p **6**. Arătați că $\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sin 60°-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sin 45°=\frac{1}{4}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}6 & -10\\ 3 & -5\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ și $M(a)=I_2+aA$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det A=0$.

5p **b)** Demonstrați că $M(a)\cdot M(b)=M(a+b+ab)$, pentru orice numere reale a și b.

5p **c)** Determinați numărul real a pentru care $M(1)+M(2)+\ldots+M(2019)=2019M(a)$.

2. Se consideră polinomul $f=mX^3+2X^2-mX-2$, unde m este număr real nenul.

5p **a)** Arătați că $f(1)=0$, pentru orice număr real nenul m.

5p **b)** Pentru $m=3$, determinaţi rădăcinile polinomului f.

5p **c)** Determinați numărul real nenul m pentru care $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}=-4$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-3x+5$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=3(x-1)(x+1)$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Demonstrați că funcția f este convexă pe $[0,+\infty)$.

5p **c)** Demonstrați că $f(x)\leq 7$, pentru orice $x\in(-\infty,1]$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{3x^2+6x+7}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1 f^2(x)\,dx=11$.

5p **b)** Calculați $\int_{-1}^{1}\frac{x+1}{f(x)}\,dx$.

5p **c)** Demonstrați că, pentru orice $a\in(0,+\infty)$, suprafața plană delimitată de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=a$ are aria mai mare sau egală cu $a\sqrt{7}$.

Examenul de bacalaureat național 2019
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 6

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\sqrt{7}\left(\sqrt{7}+1\right)-\sqrt{7}=\sqrt{7}\cdot\sqrt{7}+\sqrt{7}-\sqrt{7}=$	**2p**
	$=7+0=7$	**3p**
2.	$f(0)=8$	**3p**
	Coordonatele punctului de intersecție cu axa Oy sunt $x=0$ și $y=8$	**2p**
3.	$x^2+9=5^2 \Rightarrow x^2-16=0$	**2p**
	$x=-4$ sau $x=4$, care convin	**3p**
4.	$x-\frac{40}{100}\cdot x=300$, unde x este prețul obiectului înainte de ieftinire	**3p**
	$x=500$ de lei	**2p**
5.	$M(0,2)$, unde punctul M este mijlocul laturii AB	**2p**
	$CM=4$	**3p**
6.	$\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$	**2p**
	$\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sin 60^\circ-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sin 45^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{3}{4}-\frac{2}{4}=\frac{1}{4}$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}6 & -10\\ 3 & -5\end{vmatrix}=6\cdot(-5)-3\cdot(-10)=$	**3p**
	$=-30+30=0$	**2p**
b)	$A\cdot A=A$ și $M(a)\cdot M(b)=(I_2+aA)(I_2+bA)=I_2+aA+bA+abA\cdot A=$	**2p**
	$=I_2+aA+bA+abA=I_2+(a+b+ab)A=M(a+b+ab)$, pentru orice numere reale a și b	**3p**
c)	$(I_2+A)+(I_2+2A)+\ldots+(I_2+2019A)=2019I_2+(1+2+\ldots+2019)A=$	**3p**
	$=2019(I_2+1010A)=2019M(1010)$, de unde obținem $a=1010$	**2p**
2.a)	$f(1)=m\cdot 1^3+2\cdot 1^2-m\cdot 1-2=$	**3p**
	$=m+2-m-2=0$, pentru orice număr real nenul m	**2p**
b)	$f=3X^3+2X^2-3X-2 \Rightarrow f=(X-1)(X+1)(3X+2)$	**2p**
	$x_1=-1,\ x_2=-\frac{2}{3},\ x_3=1$	**3p**
c)	$x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=-1,\ x_1x_2x_3=\frac{2}{m}$	**2p**
	$\frac{x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3}{x_1x_2x_3}=-4 \Leftrightarrow \frac{-m}{2}=-4 \Leftrightarrow m=8$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=3x^2-3=$ $=3\left(x^2-1\right)=3(x-1)(x+1)$, $x\in\mathbb{R}$	**3p** **2p**
b)	$f''(x)=6x$, $x\in\mathbb{R}$ $f''(x)\geq 0$, pentru orice $x\in[0,+\infty)$, deci funcția f este convexă pe $[0,+\infty)$	**2p** **3p**
c)	$f'(x)\geq 0$, pentru orice $x\in(-\infty,-1]\Rightarrow f$ este crescătoare pe $(-\infty,-1]$ și $f'(x)\leq 0$, pentru orice $x\in[-1,1]\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $[-1,1]$ $f(x)\leq f(-1)$, pentru orice $x\in(-\infty,1]$ și $f(-1)=7$, deci $f(x)\leq 7$, pentru orice $x\in(-\infty,1]$	**2p** **3p**
2.a)	$\int_0^1 f^2(x)\,dx=\int_0^1\left(3x^2+6x+7\right)dx=\left(\frac{3x^3}{3}+\frac{6x^2}{2}+7x\right)\Big\|_0^1=$ $=1+3+7-0=11$	**3p** **2p**
b)	$\int_{-1}^1 \frac{x+1}{f(x)}\,dx=\int_{-1}^1\frac{x+1}{\sqrt{3x^2+6x+7}}\,dx=\frac{1}{3}\sqrt{3x^2+6x+7}\Big\|_{-1}^1=$ $=\frac{1}{3}\left(\sqrt{16}-\sqrt{4}\right)=\frac{2}{3}$	**3p** **2p**
c)	$\sqrt{3x^2+6x+7}\geq\sqrt{7}$, pentru orice $x\in[0,+\infty)$ $\mathcal{A}=\int_0^a\|f(x)\|\,dx=\int_0^a\sqrt{3x^2+6x+7}\,dx\geq\int_0^a\sqrt{7}\,dx=a\sqrt{7}$, pentru orice $a\in(0,+\infty)$	**2p** **3p**