Examenul de bacalaureat național 2020

Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că numărul $a=3+2\sqrt{2}+\dfrac{1}{3+2\sqrt{2}}$ este natural.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+1$. Arătați că $(f\circ f)(1)=f(2)+2$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $9^{x^2}=3\cdot 3^x$.

5p **4.** Determinați numărul natural nenul n, știind că mulțimea $A=\{1,2,3,\ldots,n\}$ are exact 10 submulțimi cu două elemente.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $M(1,0)$, $N(7,0)$ și $A(a,3)$, unde a este număr real. Știind că $AM=AN$, arătați că segmentul AO are lungimea egală cu 5.

5p **6.** Se consideră $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ pentru care $3\cos x-2=2\cos 2x$. Calculați $\cos x$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1 & 2-a & a\\ a & 1 & 1\\ a & 2a-5 & a-2\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}x+(2-a)y+az=1\\ ax+y+z=2-a\\ ax+(2a-5)y+(a-2)z=-4\end{cases}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det\big(A(0)\big)=3$.

5p **b)** Demonstrați că $\det\big(A(a)\big)=(a-1)(a-3)(3a+1)$, pentru orice număr real a.

5p **c)** Determinați numărul natural a pentru care sistemul are soluție unică (x_0,y_0,z_0) și x_0, y_0, z_0 sunt numere naturale.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=\log_2\left(2^x+2^y\right)$.

5p **a)** Arătați că $0*0=1$.

5p **b)** Demonstrați că legea de compoziție „$*$” este comutativă.

5p **c)** Determinați numărul real x pentru care $(x*x)*x=3+\log_2 3$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x^4-x^2+1}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{x\left(2x^2-1\right)}{\sqrt{x^4-x^2+1}}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=1$, situat pe graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că, pentru orice $m\in\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},1\right)$, ecuația $f(x)=m$ are exact patru soluții reale.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x}{x^2+2x+5}$.

5p **a)** Arătați că $\int_1^2 x\cdot\dfrac{1}{f(x)}\,dx=\dfrac{31}{3}$.

5p **b)** Arătați că $\int_0^1 g(x)\,dx=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{8}{5}$, unde $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)+\dfrac{1}{x^2+2x+5}$.

5p **c)** Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n=\int_{-1}^{1} x^{2n-1}f(x)\,dx$. Demonstrați că $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n=0$.

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$a=3+2\sqrt{2}+\frac{3-2\sqrt{2}}{9-8}=$	**3p**
	$=3+2\sqrt{2}+3-2\sqrt{2}=6$, care este număr natural	**2p**
2.	$(f\circ f)(1)=f(f(1))=f(3)=7$	**3p**
	$f(2)=5$, deci $(f\circ f)(1)=f(2)+2$	**2p**
3.	$3^{2x^2}=3^{x+1}\Leftrightarrow 2x^2=x+1$	**2p**
	$2x^2-x-1=0$, de unde obținem $x=-\frac{1}{2}$ sau $x=1$	**3p**
4.	Numărul submulţimilor cu două elemente ale mulţimii A este C_n^2	**2p**
	$\frac{n!}{2!(n-2)!}=10\Leftrightarrow n^2-n-20=0$ şi, cum n este număr natural, obţinem $n=5$	**3p**
5.	$AM=AN$, deci $a=4$	**3p**
	$A(4,3)$, deci $AO=\sqrt{3^2+4^2}=5$	**2p**
6.	$3\cos x-2=4\cos^2 x-2\Leftrightarrow 4\cos^2 x-3\cos x=0\Leftrightarrow \cos x(4\cos x-3)=0$	**3p**
	Cum $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, obținem $\cos x=\frac{3}{4}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(0)=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&1\\0&-5&-2\end{pmatrix}\Rightarrow \det(A(0))=\begin{vmatrix}1&2&0\\0&1&1\\0&-5&-2\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=(-2)+0+0-0-(-5)-0=3$	**3p**
b)	$\det(A(a))=\begin{vmatrix}1&2-a&a\\a-1&a-1&1-a\\a&2a-5&a-2\end{vmatrix}=(a-1)\begin{vmatrix}1&2-a&a\\1&1&-1\\a&2a-5&a-2\end{vmatrix}=(a-1)\begin{vmatrix}1&1-a&a+1\\1&0&0\\a&a-5&2a-2\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=-(a-1)\begin{vmatrix}1-a&a+1\\a-5&2a-2\end{vmatrix}=(a-1)(3a^2-8a-3)=(a-1)(a-3)(3a+1)$, pentru orice număr real a	**3p**
c)	Sistemul are soluție unică $(x_0,y_0,z_0)\Leftrightarrow \det(A(a))\neq 0$, deci, pentru $a\in\mathbb{N}$, obținem $a\in\mathbb{N}\setminus\{1,3\}$ şi, cum x_0, y_0, $z_0\in\mathbb{N}$ şi $ax_0+y_0+z_0=2-a$, obținem $2-a\in\mathbb{N}$	**3p**
	$a=2$, care nu convine, $a=0$ care convine	**2p**
2.a)	$0*0=\log_2(2^0+2^0)=\log_2(1+1)=$	**3p**
	$=\log_2 2=1$	**2p**

b)	$x*y=\log_2\left(2^x+2^y\right)=\log_2\left(2^y+2^x\right)=$ $=y*x$, pentru orice numere reale x și y, deci legea de compoziție „$*$” este comutativă	**3p** **2p**
c)	$(x*x)*x=\log_2\left(2^x+2^x\right)*x=\log_2\left(2^{x+1}\right)*x=(x+1)*x=\log_2\left(2^{x+1}+2^x\right)=\log_2\left(2^x\cdot 3\right)$, unde x este număr real $\log_2\left(2^x\cdot 3\right)=3+\log_2 3$, de unde obținem $x=3$	**3p** **2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\frac{4x^3-2x}{2\sqrt{x^4-x^2+1}}=$ $=\frac{2x\left(2x^2-1\right)}{2\sqrt{x^4-x^2+1}}=\frac{x\left(2x^2-1\right)}{\sqrt{x^4-x^2+1}}$, $x\in\mathbb{R}$	**3p** **2p**
b)	$f(1)=1$, $f'(1)=1$ Ecuația tangentei este $y-f(1)=f'(1)(x-1)$, adică $y=x$	**2p** **3p**
c)	$f'(x)=0\Leftrightarrow x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$, $x=0$ sau $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ și $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$, f este continuă pe $\mathbb{R}$, f este strict descrescătoare pe $\left(-\infty,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ și pe $\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, f este strict crescătoare pe $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$ și pe $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},+\infty\right)$ și $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ Cum $f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}<m$, $f(0)=1>m$ și $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}<m$, obținem că, pentru orice $m\in\left(\frac{\sqrt{3}}{2},1\right)$, ecuaţia $f(x)=m$ are exact patru soluţii reale	**3p** **2p**
2.a)	$\int_1^2 x\cdot\frac{x^2+2x+5}{x}dx=\int_1^2\left(x^2+2x+5\right)dx=\left.\left(\frac{x^3}{3}+x^2+5x\right)\right\|_1^2=$ $=\frac{8}{3}+4+10-\frac{1}{3}-1-5=\frac{7}{3}+8=\frac{31}{3}$	**3p** **2p**
b)	$\int_0^1 g(x)dx=\int_0^1\frac{x+1}{x^2+2x+5}dx=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{\left(x^2+2x+5\right)'}{x^2+2x+5}dx=$ $=\left.\frac{1}{2}\ln\left(x^2+2x+5\right)\right\|_0^1=\frac{1}{2}\ln\frac{8}{5}$	**3p** **2p**
c)	$x^{2n}\geq 0$ și $x^2+2x+5\geq 4\Rightarrow 0\leq\frac{x^{2n}}{x^2+2x+5}\leq\frac{x^{2n}}{4}$, pentru orice $x\in[-1,1]$ și orice $n\in\mathbb{N}^*$ $0\leq\int_{-1}^1 x^{2n-1}f(x)dx\leq\int_{-1}^1\frac{x^{2n}}{4}dx$ și, cum $\int_{-1}^1\frac{x^{2n}}{4}dx=\frac{1}{2(2n+1)}$ și $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{2(2n+1)}=0$, obținem $\lim\limits_{n\to+\infty}I_n=0$	**2p** **3p**