**Examenul de bacalaureat național 2020**
**Proba E. c)**
**Matematică *M_mate-info***

**Varianta 3**

***Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică***
***Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică***

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

**SUBIECTUL I** **(30 de puncte)**

**5p** **1.** Se consideră numărul complex $z=2+i$. Arătați că $z^2-4z+5=0$.

**5p** **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+x+a$, unde $a$ este număr real. Determinați numărul real $a$, știind că punctul $M(0,2)$ aparține graficului funcției $f$.

**5p** **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $x=\sqrt[3]{x^3+2x}$.

**5p** **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de cinci cifre distincte, formate cu cifre din mulțimea $\{1,2,3,4,5\}$, acesta să aibă cifra zecilor egală cu $2$ și cifra unităților egală cu $3$.

**5p** **5.** În reperul cartezian $xOy$ se consideră punctele $A(0,1)$, $B(2,3)$ și $C(4,a)$, unde $a$ este un număr real. Determinați numărul real $a$, știind că punctul $C$ este situat pe mediatoarea segmentului $AB$.

**5p** **6.** Măsurile unghiurilor $A$, $B$ și $C$ ale triunghiului $ABC$ sunt, în această ordine, termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice. Demonstrați că măsura unghiului $B$ este egală cu $\frac{\pi}{3}$.

**SUBIECTUL al II-lea** **(30 de puncte)**

**1.** Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1+\ln x\\ 0 & x & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, unde $x\in(0,+\infty)$.

**5p** **a)** Arătați că $\det\big(A(1)\big)=1$.

**5p** **b)** Demonstrați că $A(x)A(y)=A(y)A(x)$, pentru orice $x,y\in(0,+\infty)$.

**5p** **c)** Determinați numărul natural $n$ pentru care $A\left(\frac{1}{3}\right)\cdot A\left(\frac{1}{2}\right)\cdot A(1)\cdot A(2)\cdot A(3)=\begin{pmatrix}1 & 0 & n\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

**2.** Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=xy-4(x+y)+a$, unde $a$ este număr real.

**5p** **a)** Pentru $a=10$, arătați că $1*2=0$.

**5p** **b)** Pentru $a=20$, arătați că $e=5$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”.

**5p** **c)** Demonstrați că, dacă $a\in[20,+\infty)$, atunci mulțimea $H=[4,+\infty)$ este parte stabilă a mulțimii numerelor reale în raport cu legea de compoziție „$*$”.

**SUBIECTUL al III-lea** **(30 de puncte)**

**1.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to(0,+\infty)$, $f(x)=6^x-3^x+2^x$.

**5p** **a)** Arătați că $f'(0)=\ln 4$.

**5p** **b)** Se consideră tangenta la graficul funcției $f$ în punctul de abscisă $x=0$, situat pe graficul funcției $f$. Determinați numărul real $a$ pentru care punctul $A\big(a,\ln(16e)\big)$ este situat pe această tangentă.

**5p** **c)** Calculați $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\big(f(x)\big)}{x}$.

**2.** Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=1-\frac{2x}{x^2+3}-\frac{2}{x^2+3}$.

**5p** **a)** Arătaţi că $\int_1^2 \left(x^2+3\right) f(x)\,dx=\frac{1}{3}$.

**5p** **b)** Arătaţi că $\int_0^1 f(x)\,dx=1-\ln\frac{4}{3}-\frac{\pi\sqrt{3}}{9}$.

**5p** **c)** Pentru fiecare număr natural nenul $n$, se consideră numărul $I_n=\int_0^1 f^n(x)\,dx$. Arătați că $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n=0$.

**Examenul de bacalaureat național 2020**
**Proba E. c)**
**Matematică *M_mate-info***
**BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE**

**Varianta 3**

***Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică***
***Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică***

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

**SUBIECTUL I** **(30 de puncte)**

| | | |
|---|---|---|
| **1.** | $z^2-4z+5=(2+i)^2-4(2+i)+5=4+4i+i^2-8-4i+5=$ | **3p** |
| | $=i^2+1=-1+1=0$ | **2p** |
| **2.** | $M(0,2)\in G_f \Leftrightarrow f(0)=2$ | **3p** |
| | $a=2$ | **2p** |
| **3.** | $x^3=x^3+2x \Leftrightarrow 2x=0$ | **3p** |
| | $x=0$ | **2p** |
| **4.** | Mulțimea numerelor naturale de cinci cifre distincte, formate cu cifre din mulțimea $\{1,2,3,4,5\}$ are $5!=120$ de elemente, deci sunt $120$ de cazuri posibile | **2p** |
| | Numerele naturale de cinci cifre distincte, formate cu cifre din mulțimea $\{1,2,3,4,5\}$, care au cifra zecilor egală cu $2$ și cifra unităților egală cu $3$, sunt $6$, deci sunt $6$ cazuri favorabile | **2p** |
| | $p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{6}{120}=\dfrac{1}{20}$ | **1p** |
| **5.** | $CA=CB \Leftrightarrow \sqrt{(4-0)^2+(a-1)^2}=\sqrt{(4-2)^2+(a-3)^2}$ | **3p** |
| | $16+a^2-2a+1=4+a^2-6a+9 \Leftrightarrow a=-1$ | **2p** |
| **6.** | $A+B+C=\pi$, $2B=A+C$ | **3p** |
| | $3B=\pi \Rightarrow B=\dfrac{\pi}{3}$ | **2p** |

**SUBIECTUL al II-lea** **(30 de puncte)**

| | | |
|---|---|---|
| **1.a)** | $A(1)=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(1))=\begin{vmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{vmatrix}=$ | **3p** |
| | $=1+0+0-0-0-0=1$ | **2p** |
| **b)** | $A(x)A(y)=\begin{pmatrix}1&0&2+\ln(xy)\\0&xy&0\\0&0&1\end{pmatrix}=$ | **2p** |
| | $=\begin{pmatrix}1&0&2+\ln(yx)\\0&yx&0\\0&0&1\end{pmatrix}=A(y)A(x)$, pentru orice $x,y\in(0,+\infty)$ | **3p** |
| **c)** | $A\left(\frac{1}{3}\right)A(3)=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, $A\left(\frac{1}{2}\right)A(2)=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ | **2p** |
| | $A\left(\frac{1}{3}\right)\cdot A\left(\frac{1}{2}\right)\cdot A(1)\cdot A(2)\cdot A(3)=A\left(\frac{1}{3}\right)\cdot A(3)\cdot A\left(\frac{1}{2}\right)\cdot A(2)\cdot A(1)=\begin{pmatrix}1&0&5\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow n=5$ | **3p** |

| | | |
|---|---|---|
| **2.a)** | $1*2=1\cdot 2-4(1+2)+10=$<br>$=2-12+10=0$ | **3p**<br>**2p** |
| **b)** | $x*5=x\cdot 5-4(x+5)+20=5x-4x-20+20=x$, pentru orice număr real $x$ | **2p** |
| | $5*x=5x-4(5+x)+20=5x-20-4x+20=x$, pentru orice număr real $x$, deci $e=5$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$” | **3p** |
| **c)** | $x*y=(x-4)(y-4)+a-16$, pentru orice numere reale $x$ și $y$ | **2p** |
| | $x,y\in H\Rightarrow x-4\geq 0$ și $y-4\geq 0$ și, cum $a\geq 20$, obținem $x*y\geq 4\Rightarrow x*y\in H$, deci $H$ este parte stabilă a mulțimii numerelor reale în raport cu legea de compoziție „$*$” | **3p** |

**SUBIECTUL al III-lea** **(30 de puncte)**

| | | |
|---|---|---|
| **1.a)** | $f'(x)=6^x\ln 6-3^x\ln 3+2^x\ln 2,\ x\in\mathbb{R}$ | **3p** |
| | $f'(0)=\ln 6-\ln 3+\ln 2=\ln 4$ | **2p** |
| **b)** | Ecuația tangentei este $y-f(0)=f'(0)(x-0)$ și, cum $f(0)=1$, obținem $y=x\ln 4+1$ | **3p** |
| | $\ln(16e)=a\ln 4+1\Rightarrow 1+\ln 16=\ln\left(4^a\right)+1$, deci $a=2$ | **2p** |
| **c)** | $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(f(x))}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{f'(0)}{f(0)}=$ | **3p** |
| | $=\frac{\ln 4}{1}=\ln 4$ | **2p** |
| **2.a)** | $\int_1^2\left(x^2+3\right)f(x)dx=\int_1^2\left(x^2+3-2x-2\right)dx=\int_1^2\left(x^2-2x+1\right)dx=\frac{(x-1)^3}{3}\Big\vert_1^2=$ | **3p** |
| | $=\frac{1}{3}-0=\frac{1}{3}$ | **2p** |
| **b)** | $\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\left(1-\frac{2x}{x^2+3}-\frac{2}{x^2+3}\right)dx=\left(x-\ln\left(x^2+3\right)-\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}}\right)\Big\vert_0^1=$ | **3p** |
| | $=1-\ln 4-\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\pi}{6}+\ln 3=1-\ln\frac{4}{3}-\frac{\pi\sqrt{3}}{9}$ | **2p** |
| **c)** | Pentru orice $x\in[0,1]$, $f'(x)=\frac{2(x-1)(x+3)}{\left(x^2+3\right)^2}\leq 0\Rightarrow f(1)\leq f(x)\leq f(0)\Rightarrow 0\leq f(x)\leq\frac{1}{3}$ | **2p** |
| | $0\leq I_n\leq\int_0^1\left(\frac{1}{3}\right)^n dx$, deci $0\leq I_n\leq\left(\frac{1}{3}\right)^n$ și, cum $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n=0$, obținem că $\lim\limits_{n\to+\infty}I_n=0$ | **3p** |