**Examenul de bacalaureat național 2020**
**Proba E. c)**
**Matematică *M_mate-info***

**Varianta 6**

***Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică***
***Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică***

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

**SUBIECTUL I** **(30 de puncte)**

**5p** **1.** Arătați că numărul $z=\left(1-i\sqrt{2}\right)\left(1+i\sqrt{2}\right)$ este natural, unde $i^2=-1$.

**5p** **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x+a$, unde $a$ este număr real. Determinați numărul real $a$, știind că $f(x)+f(1-x)=7$, pentru orice număr real $x$.

**5p** **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $5^x+5^{-x}=2$.

**5p** **4.** Se consideră mulțimea $A=\{1,2,3,4,5\}$. Determinați numărul submulțimilor cu trei elemente ale lui $A$, care îl conțin pe $1$.

**5p** **5.** În reperul cartezian $xOy$ se consideră punctul $M(-4,4)$. Determinați ecuația dreptei $d$ care trece prin punctul $M$ și este perpendiculară pe dreapta $OM$.

**5p** **6.** Triunghiul $ABC$ este dreptunghic în $A$ și $\sin B=\cos B$. Arătați că triunghiul $ABC$ este isoscel.

**SUBIECTUL al II-lea** **(30 de puncte)**

**1.** Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} a & a+1 & a+2 \\ a^2+1 & a^2+2 & a^2+3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, unde $a$ este număr real.

**5p** **a)** Arătați că $\det\left(A(0)\right)=-1$.

**5p** **b)** Demonstrați că, pentru orice număr real $a$, matricea $A(a)$ este inversabilă.

**5p** **c)** Determinați numerele întregi $a$ pentru care inversa matricei $A(a)$ are toate elementele numere întregi.

**2.** Pe mulțimea $A=[1,+\infty)$ se definește legea de compoziție $x*y=\frac{1}{2}\sqrt[3]{x^3y^3-x^3-y^3+9}$.

**5p** **a)** Arătați că $1*2020=1$.

**5p** **b)** Demonstrați că $x*y=\sqrt[3]{\frac{1}{8}\left(x^3-1\right)\left(y^3-1\right)+1}$, pentru orice $x,y\in A$.

**5p** **c)** Determinați $x\in A$ pentru care $x*x=x$.

**SUBIECTUL al III-lea** **(30 de puncte)**

**1.** Se consideră funcția $f:(2,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x-2}+\ln\frac{x-1}{x}$.

**5p** **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{-3x+4}{x(x-1)(x-2)^2}$, $x\in(2,+\infty)$.

**5p** **b)** Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției $f$.

**5p** **c)** Demonstrați că $\frac{1}{x-2}>\ln\frac{x}{x-1}$, pentru orice $x\in(2,+\infty)$.

**2.** Se consideră funcția $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^3+1}}$.

**5p** **a)** Arătați că $\int_0^1\left(x^3+1\right)f^2(x)\,dx=\frac{1}{3}$.

**5p** **b)** Arătați că $\int_0^1 f^2(x)\,dx = \frac{1}{3}\ln 2$.

**5p** **c)** Pentru fiecare număr natural nenul $n$, se consideră numărul $I_n = \int_0^1 f\left(x^n\right)dx$. Demonstrați că $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.

**Examenul de bacalaureat național 2020**
**Proba E. c)**
**Matematică *M_mate-info***
**BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE**

**Varianta 6**

***Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică***
***Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică***

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

**SUBIECTUL I** **(30 de puncte)**

| | | |
|---|---|---|
| **1.** | $z=1-\left(i\sqrt{2}\right)^2=1-2i^2=1-2(-1)=$ | **3p** |
| | $=1+2=3$, care este număr natural | **2p** |
| **2.** | $f(x)+f(1-x)=3x+a+3(1-x)+a=2a+3$, pentru orice număr real $x$ | **3p** |
| | $2a+3=7\Rightarrow a=2$ | **2p** |
| **3.** | $5^x+5^{-x}-2=0\Leftrightarrow\left(5^x-1\right)^2=0$ | **3p** |
| | $5^x=1$, deci $x=0$ | **2p** |
| **4.** | Numărul submulțimilor cu trei elemente ale lui $A$, care îl conțin pe $1$, este egal cu numărul submulțimilor cu două elemente ale mulţimii $\{2,3,4,5\}$, deci este egal cu $C_4^2=$ | **3p** |
| | $=\dfrac{4!}{2!(4-2)!}=6$ | **2p** |
| **5.** | $m_{OM}=-1$ și, cum $m_{OM}\cdot m_d=-1$, obținem $m_d=1$ | **2p** |
| | Ecuația dreptei $d$ este $y-y_M=m_d\left(x-x_M\right)$, deci $y=x+8$ | **3p** |
| **6.** | $\sin B=\dfrac{AC}{BC}$ | **2p** |
| | $\cos B=\dfrac{AB}{BC}\Rightarrow AB=AC$, deci triunghiul $ABC$ este isoscel | **3p** |

**SUBIECTUL al II-lea** **(30 de puncte)**

| | | |
|---|---|---|
| **1.a)** | $A(0)=\begin{pmatrix}0&1&2\\1&2&3\\1&2&4\end{pmatrix}\Rightarrow\det\left(A(0)\right)=\begin{vmatrix}0&1&2\\1&2&3\\1&2&4\end{vmatrix}=$ | **2p** |
| | $=0+4+3-4-0-4=-1$ | **3p** |
| **b)** | $\det\left(A(a)\right)=-\left(a^2-a+1\right)$, pentru orice număr real $a$ | **3p** |
| | $a^2-a+1\neq 0$, pentru orice număr real $a\Rightarrow\det\left(A(a)\right)\neq 0$, deci matricea $A(a)$ este inversabilă, pentru orice număr real $a$ | **2p** |
| **c)** | Cum $a\in\mathbb{Z}$, inversa matricei $A(a)$ are toate elementele numere întregi dacă $\det\left(A(a)\right)$ este divizor al lui 1 și, cum $\det\left(A(a)\right)<0$, pentru orice număr real $a$, obținem că $\det\left(A(a)\right)=-1$ | **3p** |
| | $a=0$ sau $a=1$, care convin | **2p** |
| **2.a)** | $1*2020=\dfrac{1}{2}\sqrt[3]{1^3\cdot 2020^3-1^3-2020^3+9}=$ | **3p** |
| | $=\dfrac{1}{2}\sqrt[3]{-1+9}=\dfrac{1}{2}\sqrt[3]{8}=1$ | **2p** |

| | | |
|---|---|---|
| **b)** | $x * y = \frac{1}{2}\sqrt[3]{x^3y^3 - x^3 - y^3 + 1 + 8} = \frac{1}{2}\sqrt[3]{x^3\left(y^3-1\right) - \left(y^3-1\right) + 8} =$ | **3p** |
| | $= \sqrt[3]{\frac{1}{8}\left(x^3-1\right)\left(y^3-1\right) + \frac{1}{8}\cdot 8} = \sqrt[3]{\frac{1}{8}\left(x^3-1\right)\left(y^3-1\right)+1}$, pentru orice $x, y \in A$ | **2p** |
| **c)** | $x * x = \sqrt[3]{\frac{1}{8}\left(x^3-1\right)^2+1}$, pentru orice $x \in A$, deci $\frac{1}{8}\left(x^3-1\right)^2 + 1 = x^3$ | **2p** |
| | $\left(x^3-1\right)^2 = 8\left(x^3-1\right)$, deci $x^3-1=0$ sau $x^3-1=8$, de unde $x=1$ sau $x=\sqrt[3]{9}$, care convin | **3p** |

**SUBIECTUL al III-lea** **(30 de puncte)**

| | | |
|---|---|---|
| **1.a)** | $f'(x) = \frac{-1}{(x-2)^2} + \frac{x}{x-1}\cdot\frac{x-(x-1)}{x^2} = \frac{-x(x-1)+(x-2)^2}{x(x-1)(x-2)^2} =$ | **3p** |
| | $= \frac{-x^2+x+x^2-4x+4}{x(x-1)(x-2)^2} = \frac{-3x+4}{x(x-1)(x-2)^2}$, $x \in (2,+\infty)$ | **2p** |
| **b)** | $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x-2} + \ln\frac{x-1}{x}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x-2} + \ln\left(1-\frac{1}{x}\right)\right) = 0$ | **3p** |
| | Dreapta de ecuație $y=0$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției $f$ | **2p** |
| **c)** | $x \in (2,+\infty) \Rightarrow f'(x) < 0$, deci $f$ strict descrescătoare pe $(2,+\infty)$ și, cum $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, obținem că $f(x) > 0$, pentru orice $x \in (2,+\infty)$ | **3p** |
| | $\frac{1}{x-2} + \ln\frac{x-1}{x} > 0$, deci $\frac{1}{x-2} > -\ln\frac{x-1}{x}$, de unde obținem că $\frac{1}{x-2} > \ln\frac{x}{x-1}$, pentru orice $x \in (2,+\infty)$ | **2p** |
| **2.a)** | $\int\limits_0^1 \left(x^3+1\right) f^2(x)\,dx = \int\limits_0^1 \left(x^3+1\right)\left(\frac{x}{\sqrt{x^3+1}}\right)^2 dx = \int\limits_0^1 x^2 dx =$ | **3p** |
| | $= \left.\frac{x^3}{3}\right\vert_0^1 = \frac{1}{3}$ | **2p** |
| **b)** | $\int\limits_0^1 f^2(x)\,dx = \int\limits_0^1 \frac{x^2}{x^3+1}dx = \frac{1}{3}\int\limits_0^1 \frac{\left(x^3+1\right)'}{x^3+1}dx =$ | **3p** |
| | $= \left.\frac{1}{3}\ln\left(x^3+1\right)\right\vert_0^1 = \frac{1}{3}\ln 2$ | **2p** |
| **c)** | $I_n = \int\limits_0^1 f\left(x^n\right)dx = \int\limits_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{x^{3n}+1}}dx$ și, cum $0 \le \frac{x^n}{\sqrt{x^{3n}+1}} \le x^n$, pentru $x \in [0,1]$ și, pentru fiecare număr natural nenul $n$, obținem că $0 \le I_n \le \int\limits_0^1 x^n dx$ | **3p** |
| | $0 \le I_n \le \frac{1}{n+1}$, pentru fiecare număr natural nenul $n$ și, cum $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1} = 0$, obținem $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$ | **2p** |