

**Examenul de bacalaureat național 2020**

**Proba E. c)**

**Matematică *M\_mate-info***

**Model**

**SUBIECTUL I**

**(30 de puncte)**

- 5p** 1. Suma primilor trei termeni ai progresiei aritmetice  $(a_n)_{n \geq 1}$  este egală cu 30. Determinați  $a_2$ .
- 5p** 2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 - 6x + 9$ . Arătați că  $(f \circ f)(3) = 9$ .
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $\log_2(x-6) = 6 - \log_2(x+6)$ .
- 5p** 4. Determinați câte numere naturale de două cifre distincte se pot forma cu elementele mulțimii  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ .
- 5p** 5. Se consideră triunghiul  $ABC$ , punctul  $D$  mijlocul laturii  $AC$  și punctul  $E$  mijlocul segmentului  $BD$ . Arătați că  $\overrightarrow{CE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{CA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ .
- 5p** 6. Se consideră triunghiul  $ABC$  cu  $AB = 2\sqrt{3}$ ,  $A = \frac{\pi}{4}$  și  $B = \frac{5\pi}{12}$ . Determinați raza cercului circumscris triunghiului  $ABC$ .

**SUBIECTUL al II-lea**

**(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea  $A(a) = \begin{pmatrix} a & 2 & 1 \\ a & 4 & 1 \\ 1 & -1 & a \end{pmatrix}$  și sistemul de ecuații  $\begin{cases} ax + 2y + z = 4 \\ ax + 4y + z = 6 \\ x - y + az = 1 \end{cases}$  unde  $a$  este număr real.
- 5p** a) Arătați că  $\det(A(1)) = 0$ .
- 5p** b) Determinați numerele reale  $a$  pentru care matricea  $A(a)$  are rangul 2.
- 5p** c) Determinați numărul real  $a$ , știind că sistemul are soluție unică  $(x_0, y_0, z_0)$  și  $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 3$ .
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție  $x * y = xy - \frac{1}{2}(x+y) + \frac{3}{4}$ . Legea de compoziție este asociativă și are elementul neutru  $e = \frac{3}{2}$ .
- 5p** a) Demonstrați că  $x * y = \left(x - \frac{1}{2}\right)\left(y - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}$ , pentru orice numere reale  $x$  și  $y$ .
- 5p** b) Determinați numerele reale nenule  $x$  pentru care  $\frac{1}{x} * x * \frac{1}{x} = x * \frac{1}{x} * x$ .
- 5p** c) Arătați că **nu** există numere întregi  $x$  și  $y$ , astfel încât  $x$  să fie simetricul lui  $y$  în raport cu legea de compoziție „\*“.

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 - 8x + 8 \ln x + 12 - 8 \ln 2$ .
- 5p** a) Arătați că  $f'(x) = \frac{2(x-2)^2}{x}$ ,  $x \in (0, +\infty)$ .
- 5p** b) Determinați ecuația dreptei care trece prin punctul  $A(3, 3)$  și este paralelă cu tangenta la graficul funcției  $f$  în punctul de abscisă  $x = 2$ , situat pe graficul funcției  $f$ .
- 5p** c) Se consideră numerele reale  $a$ ,  $b$  și  $c$  astfel încât punctul  $M(a, b)$  este situat pe graficul funcției  $g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = x^2 - 8 \ln 2 + 8 \ln x$  și punctul  $N(a, c)$  este situat pe graficul funcției  $h: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h(x) = 8x - 12$ . Demonstrați că  $b \geq c$ , pentru orice  $a \in [2, +\infty)$ .
2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 + 4}$ .
- 5p** a) Arătați că  $\int_0^1 (x^2 + 4) f(x) dx = -\frac{11}{3}$ .
- 5p** b) Demonstrați că orice primitivă a funcției  $f$  este concavă pe  $(-\infty, 0]$ .
- 5p** c) Pentru fiecare număr natural  $n$ , se consideră  $I_n = \int_1^2 x^n f(x) dx$ . Demonstrați că  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = -\infty$ .



<b>2.a)</b>	$x * y = xy - \frac{x}{2} - \frac{y}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} =$ $= x \left( y - \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2} \left( y - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} = \left( x - \frac{1}{2} \right) \left( y - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2}, \text{ pentru orice numere reale } x \text{ și } y$	<p><b>2p</b></p> <p><b>3p</b></p>
<b>b)</b>	$\left( \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \right) \left( x - \frac{1}{2} \right) \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \right) = \left( x - \frac{1}{2} \right) \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \right) \left( x - \frac{1}{2} \right) \Leftrightarrow \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \right) \left( x - \frac{1}{2} \right) \left( \frac{1}{x} - x \right) = 0$ $\frac{1}{x} - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow x = 2$ $x - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$ $\frac{1}{x} - x = 0 \Rightarrow x = -1 \text{ sau } x = 1$	<p><b>1p</b></p> <p><b>1p</b></p> <p><b>1p</b></p> <p><b>2p</b></p>
<b>c)</b>	<p>Presupunem că există <math>x</math> și <math>y</math> numere întregi, astfel încât <math>x</math> să fie simetricul lui <math>y</math>, deci</p> $x * y = e, \text{ de unde obținem } \left( x - \frac{1}{2} \right) \left( y - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ $\left( x - \frac{1}{2} \right) \left( y - \frac{1}{2} \right) = 1 \Rightarrow (2x-1)(2y-1) = 4, \text{ ceea ce nu convine, deoarece } x \text{ și } y \text{ sunt}$ <p>numere întregi și 4 este număr par</p>	<p><b>2p</b></p> <p><b>3p</b></p>

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

<b>1.a)</b>	$f'(x) = 2x - 8 + \frac{8}{x} =$ $= \frac{2x^2 - 8x + 8}{x} = \frac{2(x-2)^2}{x}, x \in (0, +\infty)$	<p><b>3p</b></p> <p><b>2p</b></p>
<b>b)</b>	<p>Dreapta este paralelă cu tangenta la graficul funcției <math>f</math> în punctul de abscisă <math>x = 2</math>, deci are panta egală cu <math>f'(2)</math></p> <p>Cum <math>f'(2) = 0</math>, ecuația dreptei este <math>y = 3</math></p>	<p><b>2p</b></p> <p><b>3p</b></p>
<b>c)</b>	<p><math>f'(x) \geq 0</math>, pentru orice <math>x \in (0, +\infty) \Rightarrow f</math> este crescătoare pe <math>(0, +\infty)</math> și, cum <math>f(2) = 0</math>, obținem <math>f(a) \geq 0</math>, pentru orice <math>a \in [2, +\infty)</math></p> <p><math>f(a) \geq 0 \Rightarrow g(a) \geq h(a) \Rightarrow b \geq c</math>, pentru orice <math>a \in [2, +\infty)</math></p>	<p><b>2p</b></p> <p><b>3p</b></p>
<b>2.a)</b>	$\int_0^1 (x^2 + 4) f(x) dx = \int_0^1 (x^2 - 4) dx = \left( \frac{x^3}{3} - 4x \right) \Big _0^1 =$ $= \frac{1}{3} - 4 = -\frac{11}{3}$	<p><b>3p</b></p> <p><b>2p</b></p>
<b>b)</b>	$F'(x) = f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 + 4}, F''(x) = f'(x) = \frac{16x}{(x^2 + 4)^2}, x \in \mathbb{R}, \text{ unde } F \text{ este o primitivă a lui } f$ <p><math>F''(x) \leq 0</math>, pentru orice <math>x \in (-\infty, 0]</math>, deci funcția <math>F</math> este concavă pe <math>(-\infty, 0]</math></p>	<p><b>3p</b></p> <p><b>2p</b></p>
<b>c)</b>	<p><math>x \in [1, 2] \Rightarrow x^n (x^2 - 4) \leq 0</math> și <math>\frac{1}{x^2 + 4} \geq \frac{1}{8}</math>, deci <math>x^n f(x) \leq \frac{1}{8} x^n (x^2 - 4)</math></p> $I_n \leq \int_1^2 \frac{1}{8} x^n (x^2 - 4) dx = \frac{1}{8} \left( \frac{x^{n+3}}{n+3} - \frac{4x^{n+1}}{n+1} \right) \Big _1^2 = \frac{1}{8} \left( -\frac{2^{n+4}}{(n+3)(n+1)} - \frac{1}{n+3} + \frac{4}{n+1} \right)$ <p>Cum <math>\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^{n+4}}{(n+3)(n+1)} = +\infty</math>, obținem <math>\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = -\infty</math></p>	<p><b>2p</b></p> <p><b>2p</b></p> <p><b>1p</b></p>