Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Test 11

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $\sqrt{7}\left(\sqrt{6}+1\right)-\sqrt{6}\left(\sqrt{7}+1\right)=\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{6}}$.

5p **2.** Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+x+1$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=2x+2$. Demonstrați că $f(x+1)-f(x)=g(x)$, pentru orice număr real x.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x-1}=\sqrt{x^2-2x-1}$.

5p **4.** Se consideră mulțimea $M=\{1,2,3,4,5\}$. Determinați numărul de submulțimi ale lui M care au cel puțin trei elemente.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră trapezul $ABCD$ cu $AB\parallel CD$ și $A(1,2)$, $B(4,5)$ și $D(-3,2)$. Determinați ecuația dreptei MN, știind că segmentul MN este linia mijlocie a trapezului $ABCD$.

5p **6.** Calculați $\sin 2x$, știind că $(2\sin x+\cos x)^2=2+3\sin^2 x$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1 & a & 2\\ a & i & a\\ -1 & a & -1\end{pmatrix}$, unde $i^2=-1$ și a este număr real.

5p **a)** Arătaţi că $\det\left(A(0)\right)=i$.

5p **b)** Demonstrați că, pentru orice număr real a, matricea $A(a)$ este inversabilă.

5p **c)** Calculați $\underbrace{A(0)\cdot A(0)\cdot A(0)\cdot\ldots\cdot A(0)}_{\text{de 2020 ori } A(0)}$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=3^{x+y}-3^{x+1}-3^{y+1}+12$.

5p **a)** Arătați că $x*1=3$, pentru orice număr real x.

5p **b)** Determinați numărul real x pentru care $0*x=-9$.

5p **c)** Demonstrați că, dacă $x*y=3$, atunci $(x-1)(y-1)=0$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-\ln\left(x^2+1\right)$.

5p **a)** Arătaţi că $f'(x)=\frac{2x^3}{x^2+1}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Demonstrați că axa Ox este tangentă graficului funcției f.

5p **c)** Demonstrați că, pentru orice număr natural nenul n, ecuația $f(x)=n$ are două soluții reale distincte.

2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{e^x}{x}$.

5p **a)** Arătați că $\int_1^e \frac{f(x)}{e^x}dx=1$.

5p **b)** Arătați că $\int_1^2 x^3 f\left(x^2\right)dx = \frac{e(e-1)\left(e^2+e+1\right)}{2}$.

5p **c)** Demonstrați că $\int_1^e f(x)dx + \int_1^e e^x \ln x \, dx = e^e$.

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Test 11

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$\sqrt{7}\left(\sqrt{6}+1\right)-\sqrt{6}\left(\sqrt{7}+1\right)=\sqrt{42}+\sqrt{7}-\sqrt{42}-\sqrt{6}=\sqrt{7}-\sqrt{6}$	**2p**
	Cum $\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{7}-\sqrt{6}}{\sqrt{7}^2-\sqrt{6}^2}=\sqrt{7}-\sqrt{6}$, obținem că $\sqrt{7}\left(\sqrt{6}+1\right)-\sqrt{6}\left(\sqrt{7}+1\right)=\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{6}}$	**3p**
2.	$f(x+1)-f(x)=(x+1)^2+(x+1)+1-\left(x^2+x+1\right)=$	**2p**
	$=x^2+2x+1+x+1+1-x^2-x-1=2x+2=g(x)$, pentru orice număr real x	**3p**
3.	$x-1=x^2-2x-1\Rightarrow x^2-3x=0$	**3p**
	$x=0$, care nu convine, sau $x=3$, care convine	**2p**
4.	Numărul de submulțimi ale lui M, cu cel puțin trei elemente, este egal cu $C_5^3+C_5^4+C_5^5=$	**3p**
	$=10+5+1=16$	**2p**
5.	$M(-1,2)$, unde M este mijlocul segmentului AD, $m_{AB}=1$	**3p**
	Cum MN este paralelă cu AB, ecuația dreptei MN este $y-2=x+1$, deci $y=x+3$	**2p**
6.	$4\sin^2 x+4\sin x\cos x+\cos^2 x=2+3\sin^2 x\Leftrightarrow 4\sin x\cos x=2-\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)$	**3p**
	$2\sin 2x=2-1$, deci $\sin 2x=\frac{1}{2}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.a)	$A(0)=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&i&0\\-1&0&-1\end{pmatrix}\Rightarrow\det\left(A(0)\right)=\begin{vmatrix}1&0&2\\0&i&0\\-1&0&-1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=-i+0+0-(-2i)-0-0=i$	**3p**
b)	$\det\left(A(a)\right)=\begin{vmatrix}1&a&2\\a&i&a\\-1&a&-1\end{vmatrix}=a^2+i$, pentru orice număr real a	**2p**
	Cum, pentru orice număr real a, $a^2+i\neq 0$, obținem că $\det\left(A(a)\right)\neq 0$, deci, pentru orice număr real a, matricea $A(a)$ este inversabilă	**3p**
c)	$A(0)\cdot A(0)=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&i^2&0\\0&0&-1\end{pmatrix}=-I_3$	**2p**
	$\underbrace{A(0)\cdot A(0)\cdot A(0)\cdot\ldots\cdot A(0)}_{\text{de 2020 ori } A(0)}=\underbrace{(-I_3)\cdot(-I_3)\cdot(-I_3)\cdot\ldots\cdot(-I_3)}_{\text{de 1010 ori } (-I_3)}=I_3$	**3p**

2.a)	$x*1=3^{x+1}-3^{x+1}-3^{1+1}+12=$ $=-9+12=3$, pentru orice număr real x	**3p** **2p**
b)	$0*x=3^{0+x}-3^{0+1}-3^{x+1}+12=3^x-3^{x+1}+9$, deci $3^{x+1}-3^x=18$ $3^x(3-1)=18\Leftrightarrow 3^x=9$, deci $x=2$	**3p** **2p**
c)	$x*y=3\Leftrightarrow 3^{x+y}-3^{x+1}-3^{y+1}+9=0\Leftrightarrow 3^x\left(3^y-3\right)-3\left(3^y-3\right)=0\Leftrightarrow\left(3^x-3\right)\left(3^y-3\right)=0$ $3^x-3=0$ sau $3^y-3=0$, deci $x=1$ sau $y=1$, de unde obținem $(x-1)(y-1)=0$	**3p** **2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=2x-\dfrac{2x}{x^2+1}=$ $=\dfrac{2x^3+2x-2x}{x^2+1}=\dfrac{2x^3}{x^2+1}$, $x\in\mathbb{R}$	**3p** **2p**
b)	Ecuația tangentei la graficul funcției f în $A(a,f(a))$ este $y-f(a)=f'(a)(x-a)$, deci axa Ox, de ecuație $y=0$, este tangentă la graficul funcției f dacă și numai dacă există numărul real a astfel încât $f'(a)=0$ și $f(a)=0$ Cum $f'(0)=0$ și $f(0)=0$, obținem că axa Ox este tangentă graficului funcției f	**3p** **2p**
c)	$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$ și $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ f este continuă pe $\mathbb{R}$, $f'(x)<0$, pentru orice $x\in(-\infty,0)\Rightarrow f$ este strict descrescătoare pe $(-\infty,0)$, $f(0)=0$ și $f'(x)>0$, pentru orice $x\in(0,+\infty)\Rightarrow f$ este strict crescătoare pe $(0,+\infty)$, deci, pentru orice număr natural nenul n, ecuația $f(x)=n$ are două soluții reale distincte	**2p** **3p**
2.a)	$\displaystyle\int_1^e\frac{f(x)}{e^x}dx=\int_1^e\frac{1}{x}dx=\ln x\Big\vert_1^e=$ $=\ln e-\ln 1=1$	**3p** **2p**
b)	$\displaystyle\int_1^2 x^3f\left(x^2\right)dx=\int_1^2 xe^{x^2}dx=\frac{1}{2}e^{x^2}\Big\vert_1^2=$ $=\dfrac{e^4-e}{2}=\dfrac{e(e-1)\left(e^2+e+1\right)}{2}$	**3p** **2p**
c)	$\displaystyle\int_1^e\frac{e^x}{x}dx+\int_1^e e^x\ln x\,dx=\int_1^e(\ln x)'e^x\,dx+\int_1^e e^x\ln x\,dx=e^x\ln x\Big\vert_1^e-\int_1^e e^x\ln x\,dx+\int_1^e e^x\ln x\,dx=$ $=e^e\ln e-e^1\ln 1=e^e$	**3p** **2p**