Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Test 12

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că numărul $N=\left(\sqrt{5}+\sqrt{13}\right)^2+\left(\sqrt{5}-\sqrt{13}\right)^2$ este pătratul unui număr natural.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+a$, unde a este număr real. Determinați numărul real a, știind că $(f\circ f)(1)+f(1)=1$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $4^x+4^{1-x}=4$.

5p **4.** Determinați numărul numerelor naturale de trei cifre distincte care se pot forma cu elementele mulțimii $A=\{0,5,7\}$.

5p **5.** Se consideră punctul G, centrul de greutate al triunghiului ABC și punctul M, mijlocul segmentului AG. Demonstrați că $6\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$.

5p **6.** Calculați măsura unghiului A al triunghiului ascuțitunghic ABC, știind că $4\mathcal{A}_{\Delta ABC}=AB\cdot AC$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}3 & 2 & -1\\ 2 & -2 & 1\\ a+4 & a+3 & a\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătaţi că $\det\left(A(0)\right)=-15$.

5p **b)** Determinați numărul real a pentru care rangul matricei $A(a)$ **nu** este egal cu 3.

5p **c)** Demonstrați că matricea $M=A(-1)\cdot A(-1)\cdot A(-1)\cdot A(-1)$ are toate elementele numere întregi, divizibile cu 25.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=\sqrt[3]{x^3+y^3+2020}$.

5p **a)** Arătaţi că $x*(-x)=\sqrt[3]{2020}$, pentru orice număr real x.

5p **b)** Determinați numerele reale x pentru care $(x+1)*(-x)=\sqrt[3]{2021}$.

5p **c)** Demonstrați că, pentru orice număr real a, există un unic număr real x pentru care $x*x*x=a$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-6x^2+9x+5$.

5p **a)** Arătaţi că $f'(x)=3(x-1)(x-3)$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați intervalele de monotonie a funcției f.

5p **c)** Demonstrați că funcția f este concavă pe $(-\infty,2]$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{2x+3}{\sqrt{x^2+3x+5}}$.

5p **a)** Arătaţi că $\int_0^1 f(x)\cdot\sqrt{x^2+3x+5}\,dx=4$.

5p **b)** Calculați $\int_{-4}^{1} f(x)\,dx$.

5p **c)** Arătați că $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, f(\sin x)\,dx = 6 - 2\sqrt{5}$.

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Test 12

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$N=5+2\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{13}+13+5-2\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{13}+13=$	**3p**
	$=36=6^2$	**2p**
2.	$f\left(f(1)\right)+f(1)=1\Leftrightarrow f(1)+a+1+a=1\Leftrightarrow 3a+2=1$	**3p**
	$a=-\dfrac{1}{3}$	**2p**
3.	$4^x+\dfrac{4}{4^x}=4\Leftrightarrow 4^{2x}-4\cdot 4^x+4=0\Leftrightarrow\left(4^x-2\right)^2=0$	**3p**
	$2^{2x}=2$, deci $x=\dfrac{1}{2}$	**2p**
4.	Cifra sutelor se poate alege în 2 moduri și pentru fiecare alegere a cifrei sutelor, cifra zecilor se poate alege în 2 moduri	**2p**
	Pentru fiecare alegere a cifrei sutelor și a cifrei zecilor, cifra unităților se poate alege într-un singur mod, deci se pot forma $2\cdot 2\cdot 1=4$ numere cu proprietatea cerută	**3p**
5.	$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AD}$, unde D este mijlocul segmentului BC	**2p**
	G este centrul de greutate al triunghiului ABC, deci $\overrightarrow{AG}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AD}$ și, cum $\overrightarrow{AM}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AG}$, obținem $6\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$	**3p**
6.	$\mathcal{A}_{\Delta ABC}=\dfrac{AB\cdot AC\cdot\sin A}{2}$, deci $\sin A=\dfrac{1}{2}$	**3p**
	Cum ΔABC este ascuțitunghic, obținem $m(\sphericalangle A)=30^\circ$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(0)=\begin{pmatrix}3&2&-1\\2&-2&1\\4&3&0\end{pmatrix}\Rightarrow\det\left(A(0)\right)=\begin{vmatrix}3&2&-1\\2&-2&1\\4&3&0\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=0+(-6)+8-8-9-0=-15$	**3p**
b)	$\det\left(A(a)\right)=\begin{vmatrix}3&2&-1\\2&-2&1\\a+4&a+3&a\end{vmatrix}=-15(a+1)$, pentru orice număr real a	**2p**
	Rangul matricei $A(a)$ nu este egal cu $3\Leftrightarrow\det\left(A(a)\right)=0$, deci $a=-1$	**3p**
c)	$A(-1)A(-1)=\begin{pmatrix}3&2&-1\\2&-2&1\\3&2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&2&-1\\2&-2&1\\3&2&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10&0&0\\5&10&-5\\10&0&0\end{pmatrix}=5B$, unde $B=\begin{pmatrix}2&0&0\\1&2&-1\\2&0&0\end{pmatrix}$	**3p**
	$M=5^2B\cdot B$ și, cum matricea $B\cdot B$ are toate elementele numere întregi, obținem că matricea M are toate elementele numere întregi, divizibile cu 25	**2p**

2.a)	$x*(-x)=\sqrt[3]{x^3+(-x)^3+2020}=$	**3p**
	$=\sqrt[3]{x^3-x^3+2020}=\sqrt[3]{2020}$, pentru orice număr real x	**2p**
b)	$(x+1)*(-x)=\sqrt[3]{(x+1)^3-x^3+2020}=\sqrt[3]{3x^2+3x+2021}$, deci $3x^2+3x+2021=2021$	**3p**
	$3x(x+1)=0$, deci $x=-1$ sau $x=0$	**2p**
c)	$\sqrt[3]{3x^3+4040}=a \Leftrightarrow 3x^3+4040=a^3 \Leftrightarrow x^3=\dfrac{a^3-4040}{3}$	**3p**
	Pentru orice număr real a, ecuația $x^3=\dfrac{a^3-4040}{3}$ are o singură soluție reală $x=\sqrt[3]{\dfrac{a^3-4040}{3}}$, deci există un unic număr real x pentru care $x*x*x=a$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=3x^2-12x+9=$	**3p**
	$=3(x^2-4x+3)=3(x-1)(x-3)$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=1$ sau $x=3$	**2p**
	$f'(x)\geq 0$, pentru orice $x\in(-\infty,1] \Rightarrow f$ este crescătoare pe $(-\infty,1]$, $f'(x)\leq 0$, pentru orice $x\in[1,3] \Rightarrow f$ este descrescătoare pe $[1,3]$ și $f'(x)\geq 0$, pentru orice $x\in[3,+\infty) \Rightarrow f$ este crescătoare pe $[3,+\infty)$	**3p**
c)	$f''(x)=6x-12$, $x\in\mathbb{R}$	**3p**
	Cum $f''(x)\leq 0$, pentru orice $x\in(-\infty,2]$, obținem că funcția f este concavă pe $(-\infty,2]$	**2p**
2.a)	$\displaystyle\int_0^1 f(x)\cdot\sqrt{x^2+3x+5}\,dx=\int_0^1(2x+3)\,dx=\left(x^2+3x\right)\Big\|_0^1=$	**3p**
	$=1+3-0=4$	**2p**
b)	$\displaystyle\int_{-4}^1 f(x)\,dx=\int_{-4}^1\frac{2x+3}{\sqrt{x^2+3x+5}}\,dx=\int_{-4}^1\frac{\left(x^2+3x+5\right)'}{\sqrt{x^2+3x+5}}\,dx=2\sqrt{x^2+3x+5}\,\Big\|_{-4}^1=$	**3p**
	$=2\sqrt{9}-2\sqrt{9}=0$	**2p**
c)	Dacă F este o primitivă a lui f, atunci $\left(F(\sin x)\right)'=F'(\sin x)\cdot(\sin x)'=f(\sin x)\cdot\cos x$, pentru orice număr real x	**3p**
	$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,f(\sin x)\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(F(\sin x)\right)'dx=F(\sin x)\Big\|_0^{\frac{\pi}{2}}=F(1)-F(0)=2\sqrt{1^2+3\cdot1+5}-2\sqrt{5}=6-2\sqrt{5}$	**2p**