

Examenul de bacalaureat național 2020  
Proba E. c)

Matematică  $M_{\text{mate-info}}$

Test 13

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Determinați rația progresiei geometrice  $(b_n)_{n \geq 1}$ , știind că  $b_1 = 2$  și  $b_3 - 4b_2 = -8$ .
- 5p 2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x + m$ , unde  $m$  este număr real. Determinați numărul real  $m$ , știind că punctul  $A(f(1), 1)$  aparține graficului funcției  $f$ .
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $\frac{x^2 - 1}{\sqrt{x - 1}} = \sqrt{x + 1}$ .
- 5p 4. Determinați numărul numerelor naturale de trei cifre care au proprietatea că pătratul cifrei zecilor este egal cu diferența dintre cifra unităților și cifra sutelor.
- 5p 5. În reperul cartezian  $xOy$  se consideră punctele  $A(0, 1)$  și  $H(3, 2)$ . Știind că  $H$  este ortocentrul triunghiului  $ABC$ , determinați panta dreptei  $BC$ .
- 5p 6. Determinați  $x \in (0, \pi)$ , știind că  $\sin x - \cos x = \sqrt{2}$ .

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea  $A(m) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & m^2 & 1 \\ m+1 & (m+1)^2 & 1 \end{pmatrix}$ , unde  $m$  este număr real.
- 5p a) Arătați că  $\det(A(0)) = 0$ .
- 5p b) Determinați mulțimea valorilor reale ale lui  $m$  pentru care matricea  $A(m)$  este inversabilă.
- 5p c) În reperul cartezian  $xOy$  se consideră punctele necoliniare  $A(1, 1)$ ,  $B(m, m^2)$  și  $C(m+1, (m+1)^2)$ , unde  $m$  este număr real. Determinați numerele reale  $m$ , știind că triunghiul  $ABC$  are aria egală cu 1.
2. Pe mulțimea  $G = (0, +\infty)$  se definește legea de compoziție  $x * y = 2^{\ln x \cdot \ln y}$ .
- 5p a) Arătați că  $x * 1 = 1$ , pentru orice  $x \in G$ .
- 5p b) Determinați  $f \in G$ , știind că  $f$  este elementul neutru al legii de compoziție „\*”.
- 5p c) Determinați  $x \in G$  pentru care  $x * \frac{1}{x} = \frac{1}{2}$ .

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x - \ln(e^x + x - 1)$ .
- 5p a) Arătați că  $f'(x) = \frac{x-2}{e^x + x - 1}$ ,  $x \in (0, +\infty)$ .
- 5p b) Demonstrați că dreapta de ecuație  $y = 0$  este asimptotă orizontală spre  $+\infty$  la graficul funcției  $f$ .
- 5p c) Determinați imaginea funcției  $f$ .
2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$ .
- 5p a) Arătați că  $\int_0^1 f(x) dx = 1 + \ln(1 + \sqrt{2})$ .

**5p** b) Calculați  $\int_{-1}^1 |x f(x)| dx$ .

**5p** c) Arătați că  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt = 2$ .

**Examenul de bacalaureat național 2020**

**Proba E. c)**

**Matematică  $M_{\text{mate-info}}$**

**BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE**

**Test 13**

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică*

*Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică*

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

**SUBIECTUL I**

**(30 de puncte)**

<b>1.</b>	$b_2 = b_1q = 2q$ și $b_3 = b_1q^2 = 2q^2$ , unde $q$ este rația progresiei geometrice $(b_n)_{n \geq 1}$ $q^2 - 4q + 4 = 0$ , deci $q = 2$	<b>2p</b> <b>3p</b>
<b>2.</b>	$A(f(1), 1)$ aparține graficului funcției $f \Leftrightarrow f(f(1)) = 1$ $f(1) + m = 1 \Leftrightarrow 2m + 1 = 1$ , deci $m = 0$	<b>2p</b> <b>3p</b>
<b>3.</b>	$x^2 - 1 = \sqrt{x^2 - 1} \Rightarrow x^2 - 1 = 0$ sau $x^2 - 1 = 1$ $x = -\sqrt{2}$ , care nu convine, sau $x = -1$ , care nu convine, sau $x = 1$ , care nu convine, sau $x = \sqrt{2}$ , care convine	<b>2p</b> <b>3p</b>
<b>4.</b>	$b^2 = c - a$ , unde $\overline{abc}$ sunt numerele cu proprietatea dată și, cum $c \leq 9$ și $a \geq 1$ , obținem $b^2 \leq 8$ , deci $b \in \{0, 1, 2\}$ Pentru $b = 0$ , obținem $c = a$ , deci sunt 9 numere, pentru $b = 1$ , obținem $c = a + 1$ , deci sunt 8 numere, iar pentru $b = 2$ , obținem $c = a + 4$ , deci sunt 5 numere; în total sunt 22 de numere cu proprietatea cerută	<b>2p</b> <b>3p</b>
<b>5.</b>	Panta dreptei $AH$ este $m_{AH} = \frac{1}{3}$ $H$ este ortocentrul $\triangle ABC$ , deci $AH \perp BC \Rightarrow m_{AH} \cdot m_{BC} = -1$ , de unde obținem $m_{BC} = -3$	<b>2p</b> <b>3p</b>
<b>6.</b>	$\sin x - \cos x = \sqrt{2} \Rightarrow (\sin x - \cos x)^2 = 2 \Rightarrow \sin^2 x - 2\sin x \cos x + \cos^2 x = 2$ $2\sin x \cos x = -1$ , deci $\sin 2x = -1$ și, cum $x \in (0, \pi)$ , obținem $2x = \frac{3\pi}{2}$ , deci $x = \frac{3\pi}{4}$	<b>2p</b> <b>3p</b>

**SUBIECTUL al II-lea**

**(30 de puncte)**

<b>1.a)</b>	$A(0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(0)) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$ $= 0 + 0 + 1 - 0 - 1 - 0 = 0$	<b>2p</b> <b>3p</b>
<b>b)</b>	$\det(A(m)) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & m^2 & 1 \\ m+1 & (m+1)^2 & 1 \end{vmatrix} = m(m-1)$ , pentru orice număr real $m$ Matricea $A(m)$ este inversabilă $\Leftrightarrow \det(A(m)) \neq 0$ , deci $m \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$	<b>2p</b> <b>3p</b>
<b>c)</b>	$\mathcal{A}_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \Delta $ , unde $\Delta = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & m^2 & 1 \\ m+1 & (m+1)^2 & 1 \end{vmatrix} = m(m-1)$ $\mathcal{A}_{\triangle ABC} = 1 \Leftrightarrow  m(m-1)  = 2$ , deci $m^2 - m = -2$ , care nu convine, sau $m^2 - m = 2$ , de unde obținem $m = -1$ sau $m = 2$ , care convin	<b>2p</b> <b>3p</b>

<b>2.a)</b>	$x * 1 = 2^{\ln x \cdot \ln 1} =$ $= 2^{\ln x \cdot 0} = 2^0 = 1$ , pentru orice $x \in G$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>b)</b>	$x * f = x \Leftrightarrow 2^{\ln x \cdot \ln f} = x \Leftrightarrow \ln x \cdot \ln f \cdot \ln 2 = \ln x$ , pentru orice $x \in G$ , deci $\ln f \cdot \ln 2 = 1$ , de unde obținem $\ln f = \frac{1}{\ln 2}$ , deci $f = e^{\frac{1}{\ln 2}} \in G$ $e^{\frac{1}{\ln 2}} * x = 2^{\ln e^{\frac{1}{\ln 2}} \cdot \ln x} = 2^{\frac{1}{\ln 2} \cdot \ln x} = x$ , pentru orice $x \in G$ , deci $f = e^{\frac{1}{\ln 2}}$ este elementul neutru al legii de compoziție „*”	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>c)</b>	$x * \frac{1}{x} = 2^{\ln x \cdot \ln \frac{1}{x}} = 2^{-\ln^2 x}$ , pentru orice $x \in G$ $2^{-\ln^2 x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \ln^2 x = 1$ , de unde obținem $\ln x = -1$ sau $\ln x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{e}$ sau $x = e$ , care convin	<b>2p</b> <b>3p</b>

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

<b>1.a)</b>	$f'(x) = 1 - \frac{e^x + 1}{e^x + x - 1} =$ $= \frac{e^x + x - 1 - e^x - 1}{e^x + x - 1} = \frac{x - 2}{e^x + x - 1}$ , $x \in (0, +\infty)$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>b)</b>	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln e^x - \ln(e^x + x - 1)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{e^x}{e^x + x - 1} =$ $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{1}{1 + \frac{x-1}{e^x}} = \ln 1 = 0$ , deci dreapta de ecuație $y = 0$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției $f$	<b>2p</b> <b>3p</b>
<b>c)</b>	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$ , $f'(x) \leq 0$ , pentru orice $x \in (0, 2] \Rightarrow f$ este descrescătoare pe $(0, 2]$ și $f'(x) \geq 0$ , pentru orice $x \in [2, +\infty) \Rightarrow f$ este crescătoare pe $[2, +\infty)$ $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$ , $f(2) = 2 - \ln(e^2 + 1)$ , $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ și $f$ este continuă pe $(0, +\infty)$ , deci imaginea funcției $f$ este $[2 - \ln(e^2 + 1), +\infty)$	<b>2p</b> <b>3p</b>
<b>2.a)</b>	$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}\right) dx = \left(x + \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})\right) \Big _0^1 =$ $= 1 + \ln(1 + \sqrt{2}) - \ln 1 = 1 + \ln(1 + \sqrt{2})$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>b)</b>	$\int_{-1}^1  xf(x)  dx = \int_{-1}^0 -x \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}\right) dx + \int_0^1 x \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}\right) dx = \left(-\frac{x^2}{2} - \sqrt{x^2 + 1}\right) \Big _{-1}^0 + \left(\frac{x^2}{2} + \sqrt{x^2 + 1}\right) \Big _0^1 =$ $= 0 - 1 + \frac{1}{2} + \sqrt{2} + \frac{1}{2} + \sqrt{2} - 1 = 2\sqrt{2} - 1$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>c)</b>	Din regula lui l'Hospital, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(t) dt}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{1} =$ $= \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}\right) = 2$	<b>3p</b> <b>2p</b>