Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Test 14

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că numerele $\log_3 5$, $\sqrt{2}$ și $\log_5 9$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.

5p **2.** Se consideră o funcție $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Demonstrați că funcția $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)-f(-x)$ este impară.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^x+3^{\frac{1}{2}-x}=1+\sqrt{3}$.

5p **4.** Determinați termenul care îl conține pe x^{10} din dezvoltarea $\left(x^3+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^{20}$, unde $x\in\mathbb{R}^*$.

5p **5.** În planul triunghiului ABC se consideră punctul G, astfel încât $3\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$. Demonstrați că G este centrul de greutate al triunghiului ABC.

5p **6.** Determinați $x\in(0,\pi)$, știind că $\sin 2x-3\sin x-2\cos x+3=0$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}3 & -1 & -1\\ -1 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$ și $M(m)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & m & 1\\ 1 & 1 & m\end{pmatrix}$, unde m este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det A=1$.

5p **b)** Demonstrați că, pentru orice număr real m, rangul matricei $M(m)$ este diferit de 2.

5p **c)** Determinați numărul real m, $m\neq 1$, știind că inversa matricei $M(m)$ este matricea A.

2. Pe mulțimea numerelor complexe se definește legea de compoziție $z_1\circ z_2=z_1+z_2+z_1z_2$.

5p **a)** Arătați că $(1+i)\circ(2-i)=6+i$.

5p **b)** Demonstrați că numărul $z\circ\overline{z}$ este număr real, pentru orice număr complex z.

5p **c)** Determinați numerele complexe z pentru care $z\circ z=-2$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{2(x-1)(x+1)}{(x^2+x+1)(x^2-x+1)}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $-\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Calculați $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(f(1)+f(2)+\ldots+f(n)+2\ln n\right)$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2+1}{e^x}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1 e^x f(x)\,dx=\frac{4}{3}$.

5p	**b)** Calculați $\int_0^1 f(-x)\,dx$.
5p	**c)** Determinați numerele reale a și b, știind că funcția $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=e^{-x}\left(-x^2+ax+b\right)$ este o primitivă a funcției f.

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Test 14

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\log_3 5\cdot\log_5 9=\log_3 5\cdot\left(2\log_5 3\right)=2=$	**3p**
	$=\sqrt{2}^2$, deci numerele $\log_3 5$, $\sqrt{2}$ și $\log_5 9$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice	**2p**
2.	$g(-x)=f(-x)-f(-(-x))=f(-x)-f(x)=$	**2p**
	$=-\left(f(x)-f(-x)\right)=-g(x)$, deci funcția g este impară	**3p**
3.	$3^x+\dfrac{\sqrt{3}}{3^x}=1+\sqrt{3}\Leftrightarrow 3^{2x}-\left(1+\sqrt{3}\right)\cdot 3^x+\sqrt{3}=0$	**2p**
	$\left(3^x-1\right)\left(3^x-\sqrt{3}\right)=0$, de unde obținem $x=0$ sau $x=\dfrac{1}{2}$	**3p**
4.	$T_{k+1}=C_{20}^k\left(x^3\right)^{20-k}\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^k=C_{20}^k x^{3(20-k)+\frac{-k}{3}}=C_{20}^k x^{60-\frac{10k}{3}}$, unde $k\in\{0,1,2,\dots,20\}$	**3p**
	$60-\dfrac{10k}{3}=10\Leftrightarrow k=15$, deci $T_{16}=C_{20}^{15}x^{10}$ îl conține pe x^{10}	**2p**
5.	$3\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GC}\Leftrightarrow 3\overrightarrow{AG}=2\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}$	**2p**
	$\overrightarrow{AG}-\overrightarrow{GB}-\overrightarrow{GC}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CG}=\vec{0}$, deci G este centrul de greutate al ΔABC	**3p**
6.	$\sin x(2\cos x-3)-(2\cos x-3)=0\Leftrightarrow(\sin x-1)(2\cos x-3)=0$	**2p**
	Cum $2\cos x-3\neq 0$ și $x\in(0,\pi)$, obținem $x=\dfrac{\pi}{2}$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}3 & -1 & -1\\ -1 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{vmatrix}=3+0+0-1-0-1=$	**3p**
	$=3-2=1$	**2p**
b)	$\det\left(M(m)\right)=(m-1)^2$, pentru orice număr real m	**2p**
	Dacă $m=1$, matricea $M(1)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$ are rangul 1, iar dacă $m\neq 1$, atunci $\det\left(M(m)\right)\neq 0$ și matricea $M(m)$ are rangul 3, deci, pentru orice număr real m, rangul matricei $M(m)$ este diferit de 2	**3p**
c)	$M(m)\cdot A=I_3\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2-m & m-1 & 0\\ 2-m & 0 & m-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$	**3p**
	Obținem $m=2$, care convine	**2p**

2.a)	$(1+i)\circ(2-i)=1+i+2-i+(1+i)(2-i)=$	**3p**
	$=3+2-i+2i-i^2=6+i$	**2p**
b)	Dacă $z=a+ib$, unde a și b sunt numere reale, atunci $z\circ\overline{z}=a+ib+a-ib+(a+ib)(a-ib)=$	**3p**
	$=2a+a^2+b^2$, care este număr real, pentru orice număr complex z	**2p**
c)	$2z+z^2=-2\Leftrightarrow z^2+2z+2=0$	**2p**
	$\Delta=-4$, deci $z=-1-i$ sau $z=-1+i$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x^2-x+1}\cdot\dfrac{(2x-1)(x^2+x+1)-(2x+1)(x^2-x+1)}{(x^2+x+1)^2}=$	**3p**
	$=\dfrac{2x^2-2}{(x^2+x+1)(x^2-x+1)}=\dfrac{2(x-1)(x+1)}{(x^2+x+1)(x^2-x+1)}$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\ln\dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\ln\dfrac{x^2\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}=\lim\limits_{x\to-\infty}\ln\dfrac{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=\ln 1=0$	**3p**
	Dreapta de ecuație $y=0$ este asimptotă orizontală spre $-\infty$ la graficul funcției f	**2p**
c)	$f(1)+f(2)+\ldots+f(n)+2\ln n=\ln\frac{1}{3}+\ln\frac{3}{7}+\ln\frac{7}{13}+\ldots+\ln\frac{n^2-n+1}{n^2+n+1}+2\ln n=$ $=\ln\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{7}{13}\cdot\ldots\cdot\frac{n^2-n+1}{n^2+n+1}\right)+\ln(n^2)=\ln\frac{1}{n^2+n+1}+\ln(n^2)=\ln\frac{n^2}{n^2+n+1}$, pentru orice număr natural nenul n	**3p**
	$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(f(1)+f(2)+\ldots+f(n)+2\ln n\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}\ln\dfrac{n^2}{n^2+n+1}=\ln 1=0$	**2p**
2.a)	$\int_0^1 e^x f(x)\,dx=\int_0^1(x^2+1)\,dx=\left.\left(\frac{x^3}{3}+x\right)\right\|_0^1=$	**3p**
	$=\frac{1}{3}+1-0=\frac{4}{3}$	**2p**
b)	$\int_0^1 f(-x)\,dx=\int_0^1(x^2+1)e^x\,dx=\left.(x^2+1)e^x\right\|_0^1-\int_0^1 2xe^x\,dx=2e-1-\left.2(x-1)e^x\right\|_0^1=$	**3p**
	$=2e-1-0+(-2)=2e-3$	**2p**
c)	F este primitivă a lui $f\Rightarrow F'(x)=f(x)\Rightarrow -e^{-x}(-x^2+ax+b)+e^{-x}(-2x+a)=e^{-x}(x^2+1)$, pentru orice număr real x	**2p**
	$x^2-(a+2)x+a-b=x^2+1$, pentru orice număr real $x\Leftrightarrow a=-2$ și $b=-3$	**3p**