

**Examenul de bacalaureat național 2020**  
**Proba E. c)**

**Matematică  $M\_mate-info$**

**Test 15**

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică*

*Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică*

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

**SUBIECTUL I**

**(30 de puncte)**

- 5p** 1. Determinați numărul complex  $z$ , pentru care  $z = 3\bar{z}$ .
- 5p** 2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 2x + a$ , unde  $a$  este număr real. Determinați numărul real  $a$ , știind că numerele  $f(0)$ ,  $f(2)$  și  $f(1)$  sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $\log_3(-x) = \log_3(x^2 - 2x - 2)$ .
- 5p** 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea  $A = \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ , pătratul acestui număr să aparțină mulțimii  $A$ .
- 5p** 5. Se consideră punctele  $A$ ,  $B$ ,  $C$  și  $D$ , astfel încât  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \vec{0}$ . Demonstrați că  $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} = \vec{0}$ .
- 5p** 6. Se consideră triunghiul ascuțitunghic  $ABC$  cu  $BC = R$ , unde  $R$  este raza cercului circumscris triunghiului. Calculați măsura unghiului  $A$  al triunghiului  $ABC$ .

**SUBIECTUL al II-lea**

**(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele  $O_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  și  $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , unde  $a$  este număr real.
- 5p** a) Arătați că  $\det(A(a)) = 1$ , pentru orice număr real  $a$ .
- 5p** b) Se consideră matricea  $B(a) = A(a) - I_3$ , unde  $a$  este număr real. Demonstrați că, pentru orice număr real  $a$ ,  $B(a) \cdot B(a) \cdot B(a) = O_3$ .
- 5p** c) Determinați numărul natural nenul  $n$ , știind că suma elementelor matricei  $X$  pentru care  $A(2) \cdot X = A(1) + A(2) + \dots + A(n)$  este egală cu 21.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție  $x * y = x^2 + 4xy + y^2$ .
- 5p** a) Arătați că  $1 * 2 = 13$ .
- 5p** b) Determinați numerele reale  $x$  pentru care  $(x * x) * x^2 = 61$ .
- 5p** c) Demonstrați că există o infinitate de numere iraționale  $a$  pentru care numărul  $a * 1$  este natural.

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x-3}{\sqrt{x^2+3}}$ .
- 5p** a) Arătați că  $f'(x) = \frac{3(x+1)}{(x^2+3)\sqrt{x^2+3}}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .
- 5p** b) Calculați  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x))^x$ .
- 5p** c) Demonstrați că  $x^5 + 2\sqrt{x^{10}+3} \geq 3$ , pentru orice număr real  $x$ .

2. Se consideră funcția  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 + \ln x$ .

5p a) Arătați că  $\int_1^3 (f(x) - \ln x) dx = \frac{26}{3}$ .

5p b) Calculați  $\int_1^2 (f(x) - x^2) dx$ .

5p c) Arătați că  $\int_1^2 \frac{1}{x} f\left(\frac{1}{x}\right) dx = \frac{3 - 4 \ln^2 2}{8}$ .

**Examenul de bacalaureat național 2020**

**Proba E. c)**

**Matematică  $M_{\text{mate-info}}$**

**BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE**

**Test 15**

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică*

*Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică*

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

**SUBIECTUL I**

**(30 de puncte)**

<b>1.</b>	$a + ib = 3(a - ib) \Leftrightarrow 2a - 4ib = 0$ , unde $z = a + ib$ , $a, b \in \mathbb{R}$ $a = 0$ și $b = 0$ , deci $z = 0$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>2.</b>	$f^2(2) = f(0)f(1) \Leftrightarrow (4+a)^2 = a(2+a) \Leftrightarrow a^2 + 8a + 16 = a^2 + 2a$ $6a = -16$ , deci $a = -\frac{8}{3}$	<b>2p</b> <b>3p</b>
<b>3.</b>	$-x = x^2 - 2x - 2 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0$ $x = -1$ , care convine, sau $x = 2$ , care nu convine	<b>2p</b> <b>3p</b>
<b>4.</b>	Mulțimea $A = \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ are 10 elemente, deci sunt 10 cazuri posibile Numerele din mulțimea $A$ al căror pătrat aparține mulțimii $A$ sunt 0, 1, 2 și 3, deci sunt 4 cazuri favorabile $p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$	<b>2p</b> <b>2p</b> <b>1p</b>
<b>5.</b>	$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DB} =$ $= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \vec{0}$	<b>2p</b> <b>3p</b>
<b>6.</b>	$\frac{BC}{\sin A} = 2R \Leftrightarrow \sin A = \frac{BC}{2R}$ $BC = R \Rightarrow \sin A = \frac{1}{2}$ și, cum $\triangle ABC$ este ascuțitunghic, obținem $m(\sphericalangle A) = 30^\circ$	<b>2p</b> <b>3p</b>

**SUBIECTUL al II-lea**

**(30 de puncte)**

<b>1.a)</b>	$\det(A(a)) = \begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 =$ $= 1 - 0 = 1$ , pentru orice număr real $a$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>b)</b>	$B(a) = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow B(a) \cdot B(a) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ , pentru orice număr real $a$ $B(a) \cdot B(a) \cdot B(a) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O_3$ , pentru orice număr real $a$	<b>3p</b> <b>2p</b>

c)	$A(1)+A(2)+\dots+A(n)=\begin{pmatrix} n & \frac{n(n+1)}{2} & 0 \\ 0 & n & \frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 0 & n \end{pmatrix}, \text{ pentru orice număr natural nenul } n \text{ și, cum}$ $\det A(2) \neq 0, (A(2))^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ obținem că } X = \begin{pmatrix} n & \frac{n(n+1)}{2} - 2n & 4n - n(n+1) \\ 0 & n & \frac{n(n+1)}{2} - 2n \\ 0 & 0 & n \end{pmatrix}$ <p>Suma elementelor matricei <math>X</math> este egală cu <math>3n</math>, deci <math>3n = 21 \Leftrightarrow n = 7</math>, care convine</p>	3p  2p
2.a)	$1 * 2 = 1^2 + 4 \cdot 1 \cdot 2 + 2^2 =$ $= 1 + 8 + 4 = 13$	3p 2p
b)	$x * x = x^2 + 4x \cdot x + x^2 = 6x^2, (x * x) * x^2 = (6x^2) * x^2 = 36x^4 + 24x^4 + x^4 = 61x^4$ $61x^4 = 61 \Leftrightarrow x = -1 \text{ sau } x = 1$	3p 2p
c)	$x * 1 = x^2 + 4x + 1 = x^2 + 4x + 4 - 3 = (x + 2)^2 - 3, \text{ pentru orice număr real } x$ <p>De exemplu, pentru <math>a = \sqrt{p} - 2</math>, unde <math>p</math> este număr prim, <math>p \geq 3</math>, obținem că <math>a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}</math> și <math>a * 1 = p - 3 \in \mathbb{N}</math>, deci există o infinitate de numere iraționale <math>a</math> pentru care numărul <math>a * 1</math> este natural</p>	2p 3p

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x) = \frac{1 \cdot \sqrt{x^2 + 3} - (x - 3) \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + 3}}}{x^2 + 3} =$ $= \frac{x^2 + 3 - x^2 + 3x}{(x^2 + 3)\sqrt{x^2 + 3}} = \frac{3(x + 1)}{(x^2 + 3)\sqrt{x^2 + 3}}, x \in \mathbb{R}$	3p 2p
b)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x))^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x - 3}{\sqrt{x^2 + 3}} \right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 + 3} \right)^{\frac{x}{2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{6 - 6x}{x^2 + 3} \right)^{\frac{x}{2}} =$ $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \left( 1 + \frac{6 - 6x}{x^2 + 3} \right)^{\frac{x^2 + 3}{6 - 6x}} \right)^{\frac{x(6 - 6x)}{2(x^2 + 3)}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \left( 1 + \frac{6 - 6x}{x^2 + 3} \right)^{\frac{x^2 + 3}{6 - 6x}} \right)^{2x^2 \left( 1 + \frac{3}{x^2} \right)} = e^{-3}$	3p 2p
c)	$f'(x) \leq 0, \text{ pentru orice } x \in (-\infty, -1] \Rightarrow f \text{ este descrescătoare pe } (-\infty, -1] \text{ și } f'(x) \geq 0, \text{ pentru orice } x \in [-1, +\infty) \Rightarrow f \text{ este crescătoare pe } [-1, +\infty) \text{ și, cum } f(-1) = -2, \text{ obținem că } f(x) \geq -2, \text{ pentru orice număr real } x$ $x - 3 \geq -2\sqrt{x^2 + 3} \Leftrightarrow x + 2\sqrt{x^2 + 3} \geq 3, \text{ pentru orice număr real } x, \text{ deci } x^5 + 2\sqrt{x^{10} + 3} \geq 3, \text{ pentru orice număr real } x$	3p 2p
2.a)	$\int_1^3 (f(x) - \ln x) dx = \int_1^3 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big _1^3 =$ $= \frac{27}{3} - \frac{1}{3} = \frac{26}{3}$	3p 2p

<b>b)</b>	$\int_1^2 (f(x) - x^2) dx = \int_1^2 \ln x dx = x \ln x \Big _1^2 - \int_1^2 x \cdot \frac{1}{x} dx =$ $= 2 \ln 2 - x \Big _1^2 = 2 \ln 2 - 2 + 1 = 2 \ln 2 - 1$	<p><b>3p</b></p> <p><b>2p</b></p>
<b>c)</b>	$\int_1^2 \frac{1}{x} f\left(\frac{1}{x}\right) dx = \int_1^2 \frac{1}{x} \left( \frac{1}{x^2} + \ln \frac{1}{x} \right) dx = \int_1^2 \left( x^{-3} - \frac{1}{x} \ln x \right) dx = \left( \frac{x^{-2}}{-2} - \frac{1}{2} \ln^2 x \right) \Big _1^2 =$ $= -\frac{1}{8} - \frac{1}{2} \ln^2 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \ln^2 1 = \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \ln^2 2 = \frac{3 - 4 \ln^2 2}{8}$	<p><b>3p</b></p> <p><b>2p</b></p>