Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Test 16

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinați numărul de elemente ale mulțimii $A=\left\{x\in\mathbb{Z}\,\middle|\,-\sqrt{5}<x<\sqrt{7}\right\}$.

5p **2.** Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-2x+a$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=-x^2+2bx+1$, unde a și b sunt numere reale. Determinați numerele reale a și b, știind că parabolele asociate celor două funcții au același vârf.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt[3]{1+x}+\sqrt[3]{1-x}=2$.

5p **4.** Arătați că **nu** există nicio mulțime finită care să aibă exact 12 submulțimi cu 2 elemente.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,4)$, $B(-4,3)$ și $C(5,0)$. Arătați că punctul $H(4,7)$ este ortocentrul triunghiului ABC.

5p **6.** Calculați $\cos x$, știind că $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ și $2\left(\cos^4 x-\sin^4 x\right)=-1$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}3&2&1\\6&4&2\\9&6&3\end{pmatrix}$, $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ și $B=I_3+A$.

5p **a)** Arătați că $\det A=0$.

5p **b)** Arătaţi că matricea $I_3-\frac{1}{11}A$ este inversa matricei B.

5p **c)** Dați exemplu de trei matrice $U,V,T\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, de rang 1, astfel încât $U+V+T=B$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=xy-3x-3y+a$, unde a este număr real.

5p **a)** Determinați numărul real a pentru care $(-1)*1=0$.

5p **b)** Determinați numărul real a pentru care legea de compoziție „$*$” admite element neutru.

5p **c)** Demonstrați că, dacă $a\in[12,+\infty)$, atunci mulțimea $[3,+\infty)$ este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea de compoziție „$*$”.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to(0,1)$, $f(x)=\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Calculați $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{2}+f'(1)+f'(2)+\ldots+f'(n)\right)^{\sqrt{n}}$.

5p **c)** Demonstrați că funcția f este bijectivă.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2}{x^4+1}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1 \left(x^4+1\right) f(x)dx=\dfrac{1}{3}$.

5p **b)** Demonstrați că $\int_0^1 f(x)dx \le \dfrac{\pi}{8}$.

5p **c)** Se consideră primitiva F a lui f pentru care $F(1)=0$. Calculați $\int_0^1 F(x)dx$.

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Test 16

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$-3<-\sqrt{5}<-2$ și $2<\sqrt{7}<3$, deci $A=\{-2,-1,0,1,2\}$	**3p**
	Mulțimea A are 5 elemente	**2p**
2.	Parabolele asociate celor două funcții au același vârf, deci $\frac{2}{2}=\frac{-2b}{-2}$ și $\frac{4a-4}{4}=\frac{4b^2+4}{4}$	**3p**
	$b=1$, deci $a=3$	**2p**
3.	$1+x+1-x+3\cdot\sqrt[3]{1+x}\cdot\sqrt[3]{1-x}\left(\sqrt[3]{1+x}+\sqrt[3]{1-x}\right)=8$ și, cum $\sqrt[3]{1+x}+\sqrt[3]{1-x}=2$, obținem $2+6\cdot\sqrt[3]{1+x}\cdot\sqrt[3]{1-x}=8$	**3p**
	$\sqrt[3]{(1+x)(1-x)}=1$, deci $x=0$, care convine	**2p**
4.	Numărul de submulțimi cu 2 elemente ale unei mulțimi cu n elemente, $n\geq 2$, este egal cu $C_n^2=\frac{n(n-1)}{2}$	**2p**
	$\frac{n(n-1)}{2}=12 \Leftrightarrow n^2-n-24=0$, care nu are nicio soluție număr natural	**3p**
5.	$m_{AH}=3$ și $m_{BC}=-\frac{1}{3}\Rightarrow m_{AH}\cdot m_{BC}=-1$, deci $AH\perp BC$	**2p**
	$m_{BH}=\frac{1}{2}$ și $m_{AC}=-2\Rightarrow m_{BH}\cdot m_{AC}=-1$, deci $BH\perp AC$ și, cum $AH\cap BH=\{H\}$, obținem că H este ortocentrul triunghiului ABC	**3p**
6.	$2\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)=-1$, deci $2\left(2\cos^2 x-1\right)=-1$	**3p**
	$\cos^2 x=\frac{1}{4}$ și, cum $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, obținem $\cos x=\frac{1}{2}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}3&2&1\\6&4&2\\9&6&3\end{vmatrix}=36+36+36-36-36-36=$	**3p**
	$=108-108=0$	**2p**
b)	$A\cdot A=\begin{pmatrix}30&20&10\\60&40&20\\90&60&30\end{pmatrix}=10A\Rightarrow\left(I_3-\frac{1}{11}A\right)\cdot B=I_3+A-\frac{1}{11}A-\frac{1}{11}A\cdot A=I_3+\frac{10}{11}A-\frac{10}{11}A=I_3$	**3p**
	$B\cdot\left(I_3-\frac{1}{11}A\right)=I_3-\frac{1}{11}A+A-\frac{1}{11}A\cdot A=I_3+\frac{10}{11}A-\frac{10}{11}A=I_3$, deci matricea $I_3-\frac{1}{11}A$ este inversa matricei B	**2p**

c)	Considerăm $U=\begin{pmatrix}4&2&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, $V=\begin{pmatrix}0&0&0\\6&5&2\\0&0&0\end{pmatrix}$ și $T=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\9&6&4\end{pmatrix}$, pentru care $\operatorname{rang} U=1$, $\operatorname{rang} V=1$ și $\operatorname{rang} T=1$	**3p**
	Cum $U+V+T=\begin{pmatrix}4&2&1\\6&5&2\\9&6&4\end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix}4&2&1\\6&5&2\\9&6&4\end{pmatrix}$, obținem că matricele $U,V,T\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ au rangul 1 și $U+V+T=B$	**2p**
2.a)	$(-1)*1=(-1)\cdot 1-3\cdot(-1)-3\cdot 1+a=a-1$	**3p**
	$a-1=0\Leftrightarrow a=1$	**2p**
b)	Există $e\in\mathbb{R}$ astfel încât $x*e=e*x=x$, pentru orice număr real $x\Leftrightarrow xe-3x-3e+a=x$, pentru orice număr real x	**2p**
	$x(e-4)-3e+a=0$, pentru orice număr real $x\Leftrightarrow e=4$ și $a=12$	**3p**
c)	$x*y=xy-3x-3y+9+a-9=(x-3)(y-3)+a-9$, pentru orice numere reale x și y	**2p**
	Pentru orice $x,y\in[3,+\infty)$, $x-3\geq 0$ și $y-3\geq 0$ și, cum $a\in[12,+\infty)$, obținem $x*y\geq 3$, deci mulțimea $[3,+\infty)$ este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea de compoziție „$*$”	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\left(\sqrt{x+1}\right)'-\left(\sqrt{x}\right)'=$	**2p**
	$=\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$, $x\in(0,+\infty)$	**3p**
b)	$f'(1)+f'(2)+\ldots+f'(n)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+1}}-\dfrac{1}{\sqrt{1}}+\dfrac{1}{\sqrt{2+1}}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}-\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}-1\right)$, pentru orice număr natural nenul n	**2p**
	$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{3}{2}+f'(1)+f'(2)+\ldots+f'(n)\right)^{\sqrt{n}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2\sqrt{n+1}}-\dfrac{1}{2}\right)^{\sqrt{n}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{2\sqrt{n+1}}\right)^{\sqrt{n}}=$ $=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\left(1+\dfrac{1}{2\sqrt{n+1}}\right)^{2\sqrt{n+1}}\right)^{\frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n+1}}}=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$	**3p**
c)	Pentru orice $x\in(0,+\infty)$, $\sqrt{x+1}>\sqrt{x}>0$, deci $\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}<0\Rightarrow f'(x)<0\Rightarrow f$ este strict descrescătoare pe $(0,+\infty)$, deci f este injectivă	**2p**
	$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$, f monotonă și continuă pe $(0,+\infty)$, deci $\operatorname{Im} f=(0,1)\Rightarrow f$ este surjectivă, de unde obținem că f este bijectivă	**3p**
2.a)	$\displaystyle\int_0^1\left(x^4+1\right)f(x)\,dx=\int_0^1 x^2\,dx=\left.\frac{x^3}{3}\right\|_0^1=$	**3p**
	$=\dfrac{1}{3}-0=\dfrac{1}{3}$	**2p**
b)	$x\in[0,1]\Rightarrow x^2\leq x$, deci $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1\frac{x^2}{x^4+1}dx\leq\int_0^1\frac{x}{x^4+1}dx=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{\left(x^2\right)'}{\left(x^2\right)^2+1}dx=\left.\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(x^2\right)\right\|_0^1=$	**3p**
	$=\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}1-\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}0=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{8}$	**2p**

c)	$\int_0^1 F(x)dx=\int_0^1 x'F(x)dx=xF(x)\Big\vert_0^1-\int_0^1 x\,f(x)dx=F(1)-\int_0^1 \frac{x^3}{x^4+1}dx=$	**3p**
	$=-\frac{1}{4}\int_0^1 \frac{\left(x^4+1\right)'}{x^4+1}dx=-\frac{1}{4}\ln\left(x^4+1\right)\Big\vert_0^1=-\frac{1}{4}\ln 2$	**2p**