Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Test 17

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că, dacă $z^2+z+2=0$, unde z este număr complex, atunci $z^2+\frac{4}{z^2}=-3$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\{2x\}$, unde $\{x\}$ reprezintă partea fracționară a lui x. Arătați că $f\left(x+\frac{1}{2}\right)=f(x)$, pentru orice număr real x.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $3^{x+1}-3^x=2^{x+2}-2^{x+1}$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr a din mulțimea $A=\left\{\sqrt{3},\sqrt{4},\sqrt{5},\ldots,\sqrt{25}\right\}$, numerele 3, 4 și a să reprezinte lungimile laturilor unui triunghi dreptunghic.

5p **5.** Se consideră paralelogramul $ABCD$ și punctele M și N astfel încât $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$ și $\overrightarrow{AN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$. Demonstrați că punctele D, M și N sunt coliniare.

5p **6.** Arătați că, dacă ABC este un triunghi oarecare, atunci $\cos A<\frac{1}{2}\left(\frac{AB}{AC}+\frac{AC}{AB}\right)$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(m)=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & m & 1\\ 1 & -3 & 2\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}x+2y+z=0\\ 2x+my+z=0\\ x-3y+2z=0\end{cases}$, unde m este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(m))=m-9$, pentru orice număr real m.

5p **b)** Determinați numărul real m pentru care sistemul de ecuații admite soluții diferite de $(0,0,0)$.

5p **c)** Pentru $m=9$, se consideră (x_0,y_0,z_0) o soluție a sistemului de ecuații, cu x_0, y_0 și z_0 numere reale astfel încât $(x_0,y_0,z_0)\neq(0,0,0)$. Calculați $\frac{x_0^2+y_0^2-z_0^2}{x_0^2+y_0^2+z_0^2}$.

2. Pe mulțimea numerelor întregi se definește legea de compoziție $x*y=xy+5x+5y+20$.

5p **a)** Arătați că $2*(-1)=23$.

5p **b)** Demonstrați că $e=-4$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”.

5p **c)** Pentru $r\in\{0,1,2\}$, notăm cu $A(r)$ mulțimea numerelor naturale care au restul r la împărțirea cu 3. Determinați numerele $r\in\{0,1,2\}$ pentru care $A(r)$ este parte stabilă a lui $\mathbb{Z}$ în raport cu legea de compoziție „$*$”.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x-1)\left(e^x-e\right)$.

5p **a)** Arătaţi că $f'(x)=xe^x-e$, $x\in(-1,+\infty)$.

5p	**b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f, în punctul de abscisă $x=1$, situat pe graficul funcției f.
5p	**c)** Determinaţi punctul de extrem al funcției f.
	2. Se consideră funcţia $f:(-2,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{\ln(x+2)}{x^2+1}$.
5p	**a)** Arătați că $\int_0^1 \dfrac{f(x)}{\ln(x+2)}dx=\dfrac{\pi}{4}$.
5p	**b)** Calculați $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$.
5p	**c)** Arătați că $\int_0^1\left(f(x)+\dfrac{\operatorname{arctg} x}{x+2}\right)dx=\dfrac{\pi}{4}\ln 3$.

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Test 17

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$z^2+z+2=0\Rightarrow z\neq 0$ și $z+\dfrac{2}{z}=-1$	**2p**
	$\left(z+\dfrac{2}{z}\right)^2=1$, deci $z^2+4+\dfrac{4}{z^2}=1$, de unde obținem $z^2+\dfrac{4}{z^2}=-3$	**3p**
2.	$f\left(x+\dfrac{1}{2}\right)=\left\{2\left(x+\dfrac{1}{2}\right)\right\}=\{2x+1\}=$	**2p**
	$=\{2x\}=f(x)$, pentru orice număr real x	**3p**
3.	$3^x(3-1)=2^{x+1}(2-1)\Leftrightarrow 2\cdot 3^x=2^{x+1}\Leftrightarrow 3^x=2^x$	**3p**
	$x=0$	**2p**
4.	Mulțimea A are 23 de elemente, deci sunt 23 de cazuri posibile	**2p**
	Numerele a din mulțimea A astfel încât 3, 4 și a să fie lungimile laturilor unui triunghi dreptunghic sunt $\sqrt{7}$ (dacă a este lungimea unei catete) și $\sqrt{25}$ (dacă a este lungimea ipotenuzei), deci sunt 2 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{2}{23}$	**1p**
5.	$\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{DA}+\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{DA}+\dfrac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)=\dfrac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AD}\right)$	**2p**
	$\overrightarrow{DN}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{DA}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}=\dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AD}\right)=\dfrac{4}{3}\overrightarrow{DM}$, deci $\overrightarrow{DM}$ și $\overrightarrow{DN}$ sunt coliniari, de unde obținem că punctele D, M și N sunt coliniare	**3p**
6.	$\dfrac{AB}{AC}+\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{AB^2+AC^2}{AB\cdot AC}$	**2p**
	Cum $\cos A=\dfrac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB\cdot AC}<\dfrac{AB^2+AC^2}{2AB\cdot AC}$, obținem $\cos A<\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{AB}{AC}+\dfrac{AC}{AB}\right)$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det(A(m))=\begin{vmatrix}1&2&1\\2&m&1\\1&-3&2\end{vmatrix}=2m+(-6)+2-m-(-3)-8=$	**3p**
	$=m+5-14=m-9$, pentru orice număr real m	**2p**
b)	Sistemul de ecuații este omogen, deci admite soluții diferite de $(0,0,0)\Leftrightarrow\det(A(m))=0$	**3p**
	$m=9$	**2p**

c)	$A(9)=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 9 & 1\\ 1 & -3 & 2\end{pmatrix}$, $\det(A(9))=0$ și $\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 9\end{vmatrix}\neq 0\Rightarrow \operatorname{rang}(A(9))=2$, deci soluțiile nenule ale sistemului de ecuații sunt de forma $\left(-\frac{7}{5}\alpha,\frac{1}{5}\alpha,\alpha\right)$, unde $\alpha\in\mathbb{R}^*$	**3p**
	$\frac{x_0^2+y_0^2-z_0^2}{x_0^2+y_0^2+z_0^2}=\frac{\frac{49\alpha^2}{25}+\frac{\alpha^2}{25}-\alpha^2}{\frac{49\alpha^2}{25}+\frac{\alpha^2}{25}+\alpha^2}=\frac{25\alpha^2}{75\alpha^2}=\frac{1}{3}$	**2p**
2.a)	$2*(-1)=2\cdot(-1)+5\cdot 2+5\cdot(-1)+20=$	**3p**
	$=-2+10+(-5)+20=23$	**2p**
b)	$x*(-4)=x\cdot(-4)+5x+5\cdot(-4)+20=-4x+5x+(-20)+20=x$, pentru orice număr întreg x	**3p**
	$(-4)*x=(-4)\cdot x+5\cdot(-4)+5x+20=-4x+(-20)+5x+20=x$, pentru orice număr întreg x, deci $e=-4$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”	**2p**
c)	Cum $0\circ 0=20$, $0\in A(0)$ și $20\notin A(0)$, mulțimea $A(0)$ nu este parte stabilă a lui $\mathbb{Z}$ în raport cu legea de compoziție „$*$”	**1p**
	$x,y\in A(1)\Rightarrow x=3m+1$ și $y=3n+1$, unde $m,n\in\mathbb{N}\Rightarrow x*y=9mn+18m+18n+31\in A(1)$, deci $A(1)$ este parte stabilă a lui $\mathbb{Z}$ în raport cu legea de compoziție „$*$”, deci $r=1$ convine	**2p**
	$x,y\in A(2)\Rightarrow x=3k+2$ și $y=3l+2$, unde $k,l\in\mathbb{N}\Rightarrow x*y=9kl+21k+21l+44\in A(2)$, deci $A(2)$ este parte stabilă a lui $\mathbb{Z}$ în raport cu legea de compoziție „$*$”, deci $r=2$ convine	**2p**

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1.a)	$f'(x)=e^x-e+(x-1)e^x=$	**3p**
	$=e^x-e+xe^x-e^x=xe^x-e$, $x\in(-1,+\infty)$	**2p**
b)	$f(1)=0$, $f'(1)=0$	**2p**
	Ecuația tangentei este $y-f(1)=f'(1)(x-1)$, adică $y=0$	**3p**
c)	$f''(x)=(x+1)e^x>0$, pentru orice $x\in(-1,+\infty)\Rightarrow f'$ strict crescătoare pe $(-1,+\infty)$ și, cum $f'(1)=0$, obținem că $f'(x)<0$, pentru orice $x\in(-1,1)$ și $f'(x)>0$, pentru orice $x\in(1,+\infty)$	**3p**
	Cum f este strict descrescătoare pe $(-1,1)$, f este strict crescătoare pe $(1,+\infty)$ și f este continuă în $x_0=1$, obținem că $x_0=1$ este punctul de extrem al funcției f	**2p**
2.a)	$\int_0^1\frac{f(x)}{\ln(x+2)}dx=\int_0^1\frac{1}{x^2+1}dx=\operatorname{arctg}x\Big\vert_0^1=$	**3p**
	$=\operatorname{arctg}1-\operatorname{arctg}0=\frac{\pi}{4}$	**2p**
b)	Din regula lui l’Hospital, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)dt}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{1}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(x+2)}{x^2+1}=$	**3p**
	$=\ln 2$	**2p**
c)	$\int_0^1\left(f(x)+\frac{\operatorname{arctg}x}{x+2}\right)dx=\int_0^1\left(\frac{1}{x^2+1}\cdot\ln(x+2)+\operatorname{arctg}x\cdot\frac{1}{x+2}\right)dx=\int_0^1\left(\operatorname{arctg}x\cdot\ln(x+2)\right)'dx=$	**3p**
	$=\operatorname{arctg}x\cdot\ln(x+2)\Big\vert_0^1=\operatorname{arctg}1\cdot\ln 3-\operatorname{arctg}0\cdot\ln 2=\frac{\pi}{4}\ln 3$	**2p**