

Examenul de bacalaureat național 2020

Proba E. c)

Matematică $M_mate-info$

Test 18

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Arătați că, dacă $z = 3 + i$, unde z este număr complex, atunci $z^2 - 6z + 10 = 0$.
- 5p** 2. Se consideră funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 4x$ și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x^2 + 2x - 6$. Determinați abscisa punctului de intersecție a graficelor funcțiilor f și g .
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{2x+3} = x+1$.
- 5p** 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, produsul cifrelor sale să fie un număr prim.
- 5p** 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,2)$ și $B(3,-1)$. Știind că punctul M este simetricul lui A față de B și punctul N este simetricul lui B față de M , determinați coordonatele punctului N .
- 5p** 6. Arătați că, dacă $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ și $\sin x + \cos x = \cos 2x$, atunci $\sin x - \cos x = -1$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A(x) = \begin{pmatrix} 2^x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

- 5p** a) Arătați că $\det(A(1)) = 2$.
- 5p** b) Demonstrați că $A(x) \cdot A(y) = A(x+y)$, pentru orice numere reale x și y .
- 5p** c) Determinați rangul matricei $B = A(1) \cdot A(2) \cdot A(3) - I_3$.
2. Pe mulțimea numerelor raționale se definește legea de compoziție $x * y = x^2 y^2 - 2x^2 - 2y^2 + 6$.
- 5p** a) Arătați că $1 * 1 = 3$.
- 5p** b) Arătați că $x * y \neq 2$, pentru orice numere raționale x și y .
- 5p** c) Determinați perechile (m, n) de numere întregi pentru care $m * n = 3$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 2x - 2\ln(x+1)$.
- 5p** a) Arătați că $f'(x) = \frac{2x(x+2)}{x+1}$, $x \in (-1, +\infty)$.
- 5p** b) Determinați numărul real $a \in (-1, +\infty)$, știind că tangenta la graficul funcției f în punctul $A(a, f(a))$ este paralelă cu dreapta de ecuație $y = 3x + 2020$.
- 5p** c) Demonstrați că $(x+1)^2 \geq 2\ln(x+1) + 1$, pentru orice $x \in (-1, +\infty)$.
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2 + 2}$. Pentru fiecare număr natural nenul n , se consideră numărul $I_n = \int_0^1 x^n f(x) dx$.
- 5p** a) Arătați că $\int_0^3 f^2(x) dx = 15$.

5p | **b)** Demonstrați că $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$.

5p | **c)** Arătați că $(n+2)I_n + 2(n-1)I_{n-2} = 3\sqrt{3}$, pentru orice număr natural n , $n \geq 3$.

Examenul de bacalaureat național 2020

Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Test 18

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$z^2 - 6z + 10 = (3+i)^2 - 6(3+i) + 10 = 9 + 6i + i^2 - 18 - 6i + 10 = 9 + (-1) - 8 = 0$	3p 2p
2.	$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 - 4x = x^2 + 2x - 6 \Leftrightarrow -6x = -6$ $x = 1$	3p 2p
3.	$2x + 3 = (x+1)^2 \Rightarrow 2x + 3 = x^2 + 2x + 1 \Rightarrow x^2 = 2$ $x = -\sqrt{2}$, care nu convine sau $x = \sqrt{2}$, care convine	2p 3p
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile Numerele naturale de două cifre care au produsul cifrelor un număr prim sunt 12, 21, 13, 31, 15, 51, 17 și 71, deci sunt 8 cazuri favorabile $p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{8}{90} = \frac{4}{45}$	2p 2p 1p
5.	B este mijlocul segmentului $AM \Rightarrow x_B = \frac{x_A + x_M}{2}$ și $y_B = \frac{y_A + y_M}{2}$, deci $M(7, -4)$ M este mijlocul segmentului $BN \Rightarrow x_M = \frac{x_B + x_N}{2}$ și $y_M = \frac{y_B + y_N}{2}$, deci $N(11, -7)$	2p 3p
6.	$\sin x + \cos x = \cos 2x \Leftrightarrow \sin x + \cos x = \cos^2 x - \sin^2 x \Leftrightarrow \sin x + \cos x = (\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x)$ Cum $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, obținem $\cos x - \sin x = 1$, deci $\sin x - \cos x = -1$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$A(1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(1)) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = 2$	2p 3p
b)	$A(x) \cdot A(y) = \begin{pmatrix} 2^x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^y & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^x \cdot 2^y & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2y + 2x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{x+y} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2(x+y) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A(x+y)$, pentru orice numere reale x și y	2p 3p

c)	$B = A(1+2+3) - I_3 = A(6) - I_3 = \begin{pmatrix} 2^6 - 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ <p>Cum $\det B = 0$ și $\begin{vmatrix} 2^6 - 1 & 0 \\ 0 & 12 \end{vmatrix} = 12(2^6 - 1) \neq 0$, obținem că rangul matricei B este egal cu 2</p>	2p 3p
2.a)	$1 * 1 = 1^2 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1^2 + 6 =$ $= 1 - 2 - 2 + 6 = 3$	3p 2p
b)	$x^2 y^2 - 2x^2 - 2y^2 + 6 = 2 \Leftrightarrow x^2(y^2 - 2) - 2(y^2 - 2) = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 2)(y^2 - 2) = 0$ <p>$x^2 = 2$ sau $y^2 = 2$, ceea ce este imposibil pentru orice numere raționale x și y, deci $x * y \neq 2$</p>	3p 2p
c)	$m^2 n^2 - 2m^2 - 2n^2 + 6 = 3 \Leftrightarrow m^2 n^2 - 2m^2 - 2n^2 + 4 = 1 \Leftrightarrow (m^2 - 2)(n^2 - 2) = 1$ <p>m și n sunt numere întregi $\Rightarrow m^2 - 2 = n^2 - 2 = -1$ sau $m^2 - 2 = n^2 - 2 = 1$, deci $m^2 = n^2 = 1$ sau $m^2 = n^2 = 3$, de unde obținem perechile de numere întregi $(-1, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, -1)$, $(1, 1)$</p>	2p 3p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = 2x + 2 - \frac{2}{x+1} =$ $= \frac{2x^2 + 4x + 2 - 2}{x+1} = \frac{2x(x+2)}{x+1}, x \in (-1, +\infty)$	3p 2p
b)	<p>Tangenta la graficul funcției f în punctul $A(a, f(a))$ are panta egală cu $f'(a)$ și, cum dreapta de ecuație $y = 3x + 2020$ are panta egală cu 3, obținem $f'(a) = 3$</p> $\frac{2a(a+2)}{a+1} = 3 \Leftrightarrow 2a^2 + a - 3 = 0$ și, cum $a \in (-1, +\infty)$, obținem $a = 1$	2p 3p
c)	<p>$f'(x) \leq 0$, pentru orice $x \in (-1, 0] \Rightarrow f$ este descrescătoare pe $(-1, 0]$ și $f'(x) \geq 0$, pentru orice $x \in [0, +\infty) \Rightarrow f$ este crescătoare pe $[0, +\infty) \Rightarrow f(x) \geq f(0)$, pentru orice $x \in (-1, +\infty)$ și, cum $f(0) = 0$, obținem $f(x) \geq 0$, pentru orice $x \in (-1, +\infty)$</p> $x^2 + 2x \geq 2 \ln(x+1) \Leftrightarrow (x+1)^2 \geq 2 \ln(x+1) + 1$, pentru orice $x \in (-1, +\infty)$	3p 2p
2.a)	$\int_0^3 f^2(x) dx = \int_0^3 (x^2 + 2) dx = \left(\frac{x^3}{3} + 2x \right) \Big _0^3 =$ $= 9 + 6 = 15$	3p 2p
b)	$0 \leq I_n = \int_0^1 x^n f(x) dx = \int_0^1 x^n \sqrt{x^2 + 2} dx \leq \sqrt{3} \int_0^1 x^n dx = \sqrt{3} \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1} \Big _0^1 = \frac{\sqrt{3}}{n+1}$, pentru orice număr natural nenul n <p>Cum $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{3}}{n+1} = 0$, obținem $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$</p>	3p 2p
c)	$I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{x^2 + 2} dx = \int_0^1 \frac{x^n (x^2 + 2)}{\sqrt{x^2 + 2}} dx = \int_0^1 x^{n+1} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2}} dx + 2 \int_0^1 x^{n-1} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2}} dx =$ $= \int_0^1 x^{n+1} (\sqrt{x^2 + 2})' dx + 2 \int_0^1 x^{n-1} (\sqrt{x^2 + 2})' dx = \sqrt{3} - (n+1)I_n + 2\sqrt{3} - 2(n-1)I_{n-2}$ și obținem <p>$(n+2)I_n + 2(n-1)I_{n-2} = 3\sqrt{3}$, pentru orice număr natural n, $n \geq 3$</p>	2p 3p