Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Test 19

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Se consideră progresia geometrică $(b_n)_{n\geq 1}$ cu $b_1=2$ și rația $q=\sqrt{5}$. Calculați partea întreagă a lui b_4.

5p **2.** Se consideră funcția bijectivă $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-3$. Determinați abscisa punctului de intersecție a graficelor funcțiilor f și f^{-1}.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_2\left(2x^2+x+1\right)-\log_2\left(x^2-x+2\right)=1$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, suma cifrelor sale să fie divizibilă cu 11.

5p **5.** Se consideră vectorii $\vec{u}=\vec{i}+\vec{j}$ și $\vec{v}=a\vec{i}-2\vec{j}$, unde a este număr real. Determinați numărul real a pentru care $|\vec{u}+\vec{v}|^2=|\vec{u}|^2+|\vec{v}|^2$.

5p **6.** Arătați că, dacă $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ astfel încât $\sin x+\cos x=\sqrt{2}\cos x$, atunci $x=\frac{\pi}{8}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(m)=\begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 2 & m+1 & 1 \\ 1 & 1 & m+1 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} mx+y+z=1 \\ 2x+(m+1)y+z=2 \\ x+y+(m+1)z=m+1 \end{cases}$, unde m este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det\left(A(0)\right)=0$.

5p **b)** Demonstrați că, pentru $m=-3$, sistemul de ecuații **nu** are soluții.

5p **c)** Demonstrați că, pentru orice număr real m, sistemul de ecuații are cel mult o soluție.

2. Pe mulțimea numerelor complexe se definește legea de compoziție $z_1\circ z_2=z_1+z_2-\frac{1}{2}\overline{z_1}-\frac{1}{2}\overline{z_2}$, unde $\overline{z}$ este conjugatul lui z.

5p **a)** Arătați că $(1+i)\circ(1-i)=1$.

5p **b)** Se consideră $H=\{2+bi \mid b\in\mathbb{R}\}$. Arătați că H este parte stabilă a lui $\mathbb{C}$ în raport cu legea de compoziție „$\circ$”.

5p **c)** Se consideră numărul complex z_0. Arătați că există o infinitate de numere complexe z cu proprietatea că numărul $z_0\circ z$ este real.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt[3]{x^3-3x+2}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{(x-1)(x+1)}{\sqrt[3]{\left(x^3-3x+2\right)^2}}$, $x\in(1,+\infty)$.

5p	**b)** Calculați $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1}$.
5p	**c)** Arătați că, pentru orice $a\in(0,+\infty)$, ecuația $f(x)=a$ are soluție unică.
	2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\left(x^2+2\right)e^{-x}$.
5p	**a)** Arătați că $\int\limits_1^4 e^x f(x)\,dx=27$.
5p	**b)** Calculați $\int\limits_1^e f(\ln x)\,dx$.
5p	**c)** Arătați că $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\int\limits_0^x f(t)\,dt=2$.

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Test 19

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$b_4 = b_1 q^3 = 2\cdot\sqrt{5}^3 = 10\sqrt{5} = \sqrt{500}$	**2p**
	$484 < 500 < 529 \Rightarrow 22 < \sqrt{500} < 23$, deci partea întreagă a lui b_4 este egală cu 22	**3p**
2.	$f(x) = f^{-1}(x) \Leftrightarrow f(f(x)) = x \Leftrightarrow 2f(x) - 3 = x \Leftrightarrow 2(2x-3) - 3 = x$	**3p**
	$x = 3$	**2p**
3.	$\log_2 \dfrac{2x^2+x+1}{x^2-x+2} = 1 \Rightarrow \dfrac{2x^2+x+1}{x^2-x+2} = 2 \Rightarrow 2x^2+x+1 = 2x^2-2x+4$	**3p**
	$x = 1$, care convine	**2p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile	**2p**
	Numerele naturale de două cifre care au suma cifrelor un număr divizibil cu 11 sunt 29, 38, 47, 56, 65, 74, 83 și 92, deci sunt 8 cazuri favorabile	**2p**
	$p = \dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \dfrac{8}{90} = \dfrac{4}{45}$	**1p**
5.	$\vec{u} + \vec{v} = (1+a)\vec{i} - \vec{j} \Rightarrow \lvert\vec{u}+\vec{v}\rvert^2 = (1+a)^2 + 1$	**2p**
	Cum $\lvert\vec{u}\rvert^2 = 2$ și $\lvert\vec{v}\rvert^2 = a^2 + 4$, obținem $a^2 + 2a + 2 = 2 + a^2 + 4$, deci $a = 2$	**3p**
6.	$(\sin x + \cos x)^2 = 2\cos^2 x \Leftrightarrow \sin^2 x + 2\sin x\cos x + \cos^2 x = 2\cos^2 x \Leftrightarrow \sin 2x = \cos 2x$	**2p**
	$\operatorname{tg} 2x = 1$ și, cum $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, obținem $2x = \dfrac{\pi}{4}$, deci $x = \dfrac{\pi}{8}$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(0)) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$	**2p**
	$= 0 + 2 + 1 - 1 - 0 - 2 = 0$	**3p**
b)	Dacă $m = -3$ și (x_0, y_0, z_0) este soluție a sistemului de ecuații, atunci $\begin{cases} -3x_0 + y_0 + z_0 = 1 \\ 2x_0 - 2y_0 + z_0 = 2 \\ x_0 + y_0 - 2z_0 = -2 \end{cases}$	**2p**
	Prin adunarea celor trei relații, obținem $0 = 1$, ceea ce este imposibil, deci, pentru $m = -3$, sistemul de ecuații nu are soluții	**3p**
c)	$\det(A(m)) = m^3 + 2m^2 - 3m = m(m-1)(m+3)$, pentru orice număr real m	**1p**
	Dacă $m = 0$, atunci $\begin{cases} y + z = 1 \\ 2x + y + z = 2 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$, care nu are soluții, dacă $m = 1$, atunci $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 2y + z = 2 \\ x + y + 2z = 2 \end{cases}$, care nu are soluții	**2p**

	$m\in\mathbb{R}\setminus\{-3,0,1\}\Rightarrow\det\left(A(m)\right)\neq 0$, deci sistemul de ecuații are soluție unică și, cum pentru $m=-3$, sistemul nu are soluții, obținem că sistemul de ecuații are cel mult o soluție	2p
2.a)	$(1+i)\circ(1-i)=1+i+1-i-\frac{1}{2}(1-i)-\frac{1}{2}(1+i)=$	3p
	$=2-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i=1$	2p
b)	$z_1,z_2\in H\Rightarrow z_1=2+bi$ și $z_2=2+ci$, $b,c\in\mathbb{R}\Rightarrow z_1\circ z_2=2+bi+2+ci-\frac{1}{2}(2-bi)-\frac{1}{2}(2-ci)=$	3p
	$=4+bi+ci-1+\frac{1}{2}bi-1+\frac{1}{2}ci=2+\frac{3}{2}(b+c)i\in H$, deci H este parte stabilă a lui $\mathbb{C}$ în raport cu legea de compoziție „$\circ$”	2p
c)	Dacă $z_0=a+ib$, cu $a,b\in\mathbb{R}$, pentru $z=x-ib$, unde x este număr real oarecare, obținem $z_0\circ z=a+ib+x-ib-\frac{1}{2}(a-ib)-\frac{1}{2}(x+ib)=$	3p
	$=\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}x\in\mathbb{R}$, deci există o infinitate de numere complexe z cu proprietatea că numărul $z_0\circ z$ este real	2p

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\left(\left(x^3-3x+2\right)^{\frac{1}{3}}\right)'=\frac{1}{3}\left(x^3-3x+2\right)^{-\frac{2}{3}}\left(3x^2-3\right)=$	3p
	$=\frac{1}{3}\frac{3\left(x^2-1\right)}{\sqrt[3]{\left(x^3-3x+2\right)^2}}=\frac{(x-1)(x+1)}{\sqrt[3]{\left(x^3-3x+2\right)^2}}$, $x\in(1,+\infty)$	2p
b)	$\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\frac{\sqrt[3]{x^3-3x+2}}{x-1}=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\sqrt[3]{\frac{(x-1)^2(x+2)}{(x-1)^3}}=$	3p
	$=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\sqrt[3]{\frac{x+2}{x-1}}=+\infty$	2p
c)	$f'(x)>0$, pentru orice $x\in(1,+\infty)\Rightarrow f$ este strict crescătoare, deci injectivă	2p
	$\lim\limits_{x\to 1}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ și f este continuă, deci pentru orice $a\in(0,+\infty)$, ecuația $f(x)=a$ are soluție unică	3p
2.a)	$\int_1^4 e^x f(x)dx=\int_1^4\left(x^2+2\right)dx=\left.\left(\frac{x^3}{3}+2x\right)\right\|_1^4=$	3p
	$=\frac{4^3}{3}+8-\frac{1}{3}-2=21+6=27$	2p
b)	$\int_1^e f(\ln x)dx=\int_1^e\frac{\ln^2 x+2}{e^{\ln x}}dx=\int_1^e\frac{1}{x}\left(\ln^2 x+2\right)dx=\left.\left(\frac{1}{3}\ln^3 x+2\ln x\right)\right\|_1^e=$	3p
	$=\frac{1}{3}\ln^3 e+2\ln e-\frac{1}{3}\ln^3 1-2\ln 1=\frac{1}{3}+2=\frac{7}{3}$	2p
c)	Dacă F este o primitivă a lui f, atunci $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt=\lim\limits_{x\to 0}\frac{F(x)-F(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=$	2p
	$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2+2}{e^x}=2$	3p