

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Test 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Se consideră numărul complex $z = 3 - i$. Arătați că $z^2 - 6z + 10 = 0$.
- 5p 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 6$. Determinați numărul real a , știind că $f(a) = f(a - 2)$.
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_4(x^2 + 4x + 5) = \log_4(2x + 4)$.
- 5p 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă produsul cifrelor egal cu 16.
- 5p 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,5)$, $B(3,3)$ și $C(7,3)$. Determinați coordonatele punctului D , știind că $ABCD$ este paralelogram.
- 5p 6. Se consideră $E(x) = \operatorname{tg} \frac{x}{2} - \operatorname{ctg} \frac{x}{2} + \operatorname{ctg} x + 2 \sin \frac{5x}{3}$, unde $x \in (0, \pi)$. Arătați că $E\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & -2a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2a & -2a^2 & 1 \end{pmatrix}$, unde a este număr real.
- 5p a) Arătați că $\det(A(1)) = 1$.
- 5p b) Demonstrați că $A(a)A(b) = A(a + b)$, pentru orice numere reale a și b .
- 5p c) Demonstrați că, dacă $A(n) = A(1)A(2)A(3) \cdot \dots \cdot A(2020)$, atunci numărul natural n este multiplu de 2021.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x * y = xy - \sqrt{3}(x + y) + 3 + \sqrt{3}$.
- 5p a) Arătați că $\sqrt{3} * 0 = \sqrt{3}$.
- 5p b) Demonstrați că $x * y = (x - \sqrt{3})(y - \sqrt{3}) + \sqrt{3}$, pentru orice numere reale x și y .
- 5p c) Calculați $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{1}} * \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} * \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}} * \dots * \frac{\sqrt{100}}{\sqrt{96}}$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 + 4x + 4}{e^x}$.
- 5p a) Arătați că $f'(x) = \frac{-x(x + 2)}{e^x}$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p b) Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f .
- 5p c) Demonstrați că $\lim_{n \rightarrow +\infty} (g(1) + g(2) + \dots + g(n)) = \frac{1}{e - 1}$, unde $g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{f(x)}{(x + 2)^2}$.

2. Se consideră funcția $f : (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2x+1}{x+1}$.

5p a) Arătați că $\int_0^1 (x+1)f(x)dx = 2$.

5p b) Arătați că $\int_0^1 f(x)dx = 2 - \ln 2$.

5p c) Pentru fiecare număr natural nenul n , se consideră numărul $I_n = \int_0^1 e^x (x+1)^n (f(x))^n dx$.

Demonstrați că $I_n + 2nI_{n-1} = 3^n e - 1$, pentru orice număr natural n , $n \geq 2$.

Examenul de bacalaureat național 2020

Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Test 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$(3-i)^2 - 6(3-i) + 10 =$ $= 9 - 6i + i^2 - 18 + 6i + 10 = 0$	2p 3p
2.	$f(a) = a^2 + 6, f(a-2) = (a-2)^2 + 6$ $a^2 + 6 = (a-2)^2 + 6$, de unde obținem $a = 1$	2p 3p
3.	$x^2 + 4x + 5 = 2x + 4 \Rightarrow x^2 + 2x + 1 = 0$ $x = -1$, care convine	3p 2p
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile Mulțimea numerelor naturale de două cifre, care au produsul cifrelor egal cu 16, are 3 elemente, deci sunt 3 cazuri favorabile $p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{3}{90} = \frac{1}{30}$	2p 2p 1p
5.	$ABCD$ este paralelogram, deci segmentele AC și BD au același mijloc $x_A + x_C = x_B + x_D \Rightarrow x_D = 4$ $y_A + y_C = y_B + y_D \Rightarrow y_D = 5$	1p 2p 2p
6.	$E\left(\frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} - \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} + \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2} + 2 \sin \frac{5\pi}{6} =$ $= 1 - 1 + 0 + 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$A(1) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(1)) = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} =$ $= 1 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = 1$	2p 3p
b)	$A(a)A(b) = \begin{pmatrix} 1 & -2a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2a & -2a^2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2b & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2b & -2b^2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2b-2a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2a+2b & -4ab-2a^2-2b^2 & 1 \end{pmatrix} =$ $= \begin{pmatrix} 1 & -2(a+b) & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2(a+b) & -2(a+b)^2 & 1 \end{pmatrix} = A(a+b)$, pentru orice numere reale a și b	3p 2p

c)	$A(n) = A(1)A(2)A(3) \cdot \dots \cdot A(2020) = A(1+2+3+\dots+2020) = A\left(\frac{2020 \cdot 2021}{2}\right) =$ $= A(1010 \cdot 2021)$, deci $n = 1010 \cdot 2021$, care este multiplu de 2021	3p 2p
2.a)	$\sqrt{3} * 0 = \sqrt{3} \cdot 0 - \sqrt{3}(\sqrt{3} + 0) + 3 + \sqrt{3} =$ $= -3 + 3 + \sqrt{3} = \sqrt{3}$	3p 2p
b)	$x * y = xy - \sqrt{3}x - \sqrt{3}y + 3 + \sqrt{3} =$ $= x(y - \sqrt{3}) - \sqrt{3}(y - \sqrt{3}) + \sqrt{3} = (x - \sqrt{3})(y - \sqrt{3}) + \sqrt{3}$, pentru orice numere reale x și y	2p 3p
c)	$x * \sqrt{3} = \sqrt{3}$ și $\sqrt{3} * y = \sqrt{3}$, unde x și y sunt numere reale $\left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{1}} * \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}}\right) * \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}} * \dots * \frac{\sqrt{100}}{\sqrt{96}} = \left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{1}} * \sqrt{3}\right) * \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}} * \dots * \frac{\sqrt{100}}{\sqrt{96}} = \sqrt{3} * \left(\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}} * \dots * \frac{\sqrt{100}}{\sqrt{96}}\right) = \sqrt{3}$	2p 3p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = \frac{(2x+4)e^x - (x^2+4x+4)e^x}{(e^x)^2} =$ $= \frac{e^x(-x^2-2x)}{(e^x)^2} = \frac{-x(x+2)}{e^x}$, $x \in \mathbb{R}$	3p 2p
b)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+4x+4}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+4}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^x} = 0$ Dreapta de ecuație $y = 0$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f	3p 2p
c)	$g(x) = \frac{1}{e^x}$, deci $\lim_{n \rightarrow +\infty} (g(1) + g(2) + \dots + g(n)) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{e^1} + \frac{1}{e^2} + \dots + \frac{1}{e^n}\right) =$ $= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{e} \cdot \frac{\left(\frac{1}{e}\right)^n - 1}{\frac{1}{e} - 1} = \frac{1}{e-1}$	2p 3p
2.a)	$\int_0^1 (x+1)f(x) dx = \int_0^1 (2x+1) dx = (x^2+x) \Big _0^1 =$ $= 1+1=2$	3p 2p
b)	$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \frac{2x+1}{x+1} dx = \int_0^1 \left(2 - \frac{1}{x+1}\right) dx = 2x \Big _0^1 - \ln(x+1) \Big _0^1 =$ $= 2 - \ln 2 + \ln 1 = 2 - \ln 2$	3p 2p
c)	$I_n = \int_0^1 e^x (2x+1)^n dx = e^x (2x+1)^n \Big _0^1 - 2n \int_0^1 e^x (2x+1)^{n-1} dx =$ $= e \cdot 3^n - 1 - 2nI_{n-1}$, deci $I_n + 2nI_{n-1} = 3^n e - 1$, pentru orice număr natural n , $n \geq 2$	3p 2p