Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Test 20

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Arătați că numărul $A = z(2+3i) + \overline{z}(2-3i)$ este real, pentru orice număr complex z, unde $\overline{z}$ este conjugatul lui z.

5p **2.** Se consideră $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-6x+7$. Arătați că $f\left(\sqrt{2}\right)\cdot f\left(1+\sqrt{2}\right)\cdot f\left(2+\sqrt{2}\right)\cdot\ldots\cdot f\left(10+\sqrt{2}\right)=0$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\lg\left(x^2+x-2\right)=1+\lg\frac{x-1}{2}$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, produsul cifrelor sale să fie mai mare decât 51.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(4,6)$, $B(-3.-1)$ și $C(-2,-2)$. Arătați că punctul $M(1,2)$ este centrul cercului circumscris triunghiului ABC.

5p **6.** Se consideră R, raza cercului circumscris triunghiului ABC și r, raza cercului înscris în triunghiul ABC. Știind că $\sin A+\sin B+\sin C=\frac{1}{rR}$, arătați că aria triunghiului ABC este egală cu 1.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(m)=\begin{pmatrix}2 & 1 & m\\ 4 & 1 & m\\ 1 & -m & -1\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}2x+y+mz=4\\ 4x+y+mz=6\\ x-my-z=-1\end{cases}$, unde m este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det\left(A(0)\right)=2$.

5p **b)** Determinați mulțimea valorilor reale ale lui m pentru care matricea $A(m)$ este inversabilă.

5p **c)** Demonstrați că, pentru orice $m\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$, soluția (x_0,y_0,z_0) a sistemului de ecuații verifică relația $\frac{y_0}{z_0}=x_0$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=x\sqrt{y^2+1}+y\sqrt{x^2+1}$.

5p **a)** Arătați că $2*(-2)=0$.

5p **b)** Verificați dacă $e=0$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”.

5p **c)** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{e^{2x}-1}{2e^x}$. Arătați că $f(x)*f(y)=f(x+y)$, pentru orice numere reale x și y.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{e^x}{\sqrt{x^2+1}}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{e^x\left(x^2-x+1\right)}{\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Calculați $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(-x)}{x}$.

5p **c)** Determinați imaginea funcției f.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{x^2+4}$.

5p **a)** Arătați că $\int\limits_0^2 f(x)dx=\dfrac{\pi}{8}$.

5p **b)** Pentru fiecare număr natural n, considerăm numărul $I_n=\int\limits_0^1 f^n(x)dx$. Arătați că $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n=0$.

5p **c)** Determinați numărul real a, $a>0$, pentru care $\int\limits_0^a x\,f(x)dx=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{5}{4}$.

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Test 20

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	Cum $2-3i=\overline{2+3i}$, $A=z(2+3i)+\overline{z}\cdot\overline{2+3i}=$	**2p**
	$=z(2+3i)+\overline{z(2+3i)}\in\mathbb{R}$, deoarece este suma dintre un număr complex și conjugatul său	**3p**
2.	$f(3+\sqrt{2})=(3+\sqrt{2})^2-6(3+\sqrt{2})+7=9+6\sqrt{2}+2-18-6\sqrt{2}+7=9+2-18+7=$	**3p**
	$=0$, deci $f(\sqrt{2})\cdot f(1+\sqrt{2})\cdot f(2+\sqrt{2})\cdot\ldots\cdot f(10+\sqrt{2})=0$	**2p**
3.	$\lg(x^2+x-2)=\lg\left(10\cdot\frac{x-1}{2}\right)\Rightarrow x^2+x-2=5x-5\Rightarrow x^2-4x+3=0$	**3p**
	$x=1$, care nu convine, sau $x=3$, care convine	**2p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile	**2p**
	Numerele naturale de două cifre care au produsul cifrelor mai mare decât 51 sunt 69, 96, 78, 87, 79, 97, 88, 89, 98 și 99, deci sunt 10 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{10}{90}=\frac{1}{9}$	**1p**
5.	$AM=5$, $BM=5$, $CM=5$	**3p**
	$AM=BM=CM$, deci punctul M este centrul cercului circumscris ΔABC	**2p**
6.	$\frac{AB}{\sin C}=\frac{AC}{\sin B}=\frac{BC}{\sin A}=2R\Rightarrow\sin A+\sin B+\sin C=\frac{BC}{2R}+\frac{AC}{2R}+\frac{AB}{2R}\Rightarrow\frac{AB+AC+BC}{2R}=\frac{1}{rR}$	**3p**
	$p=\frac{1}{r}$ și, cum $r=\frac{S}{p}$, obținem $S=1$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(0)=\begin{pmatrix}2&1&0\\4&1&0\\1&0&-1\end{pmatrix}\Rightarrow\det(A(0))=\begin{vmatrix}2&1&0\\4&1&0\\1&0&-1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=-2+0+0-0-(-4)-0=2$	**3p**
b)	$\det(A(m))=2(1-m)(1+m)$, pentru orice număr real m	**3p**
	Matricea $A(m)$ este inversabilă $\Leftrightarrow\det(A(m))\neq 0\Leftrightarrow m\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$	**2p**
c)	$m\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}\Rightarrow\det(A(m))\neq 0$, deci sistemul de ecuații are soluția $\left(1,\frac{2}{m+1},\frac{2}{m+1}\right)$, unde $m\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$	**3p**
	$\frac{y_0}{z_0}=\frac{\frac{2}{m+1}}{\frac{2}{m+1}}=1=x_0$, pentru orice $m\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$	**2p**

2.a)	$2*(-2)=2\cdot\sqrt{(-2)^2+1}+(-2)\cdot\sqrt{2^2+1}=$	**3p**
	$=2\sqrt{5}-2\sqrt{5}=0$	**2p**
b)	$x*0=x\sqrt{0^2+1}+0\cdot\sqrt{x^2+1}=x\sqrt{1}=x$, pentru orice număr real x	**2p**
	$0*x=0\cdot\sqrt{x^2+1}+x\sqrt{0^2+1}=x\sqrt{1}=x$, pentru orice număr real x, deci $e=0$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”	**3p**
c)	$f(x)*f(y)=f(x)\sqrt{f^2(y)+1}+f(y)\sqrt{f^2(x)+1}=\frac{e^{2x}-1}{2e^x}\sqrt{\left(\frac{e^{2y}-1}{2e^y}\right)^2+1}+\frac{e^{2y}-1}{2e^y}\sqrt{\left(\frac{e^{2x}-1}{2e^x}\right)^2+1}=$	**2p**
	$=\frac{e^{2x}-1}{2e^x}\sqrt{\left(\frac{e^{2y}+1}{2e^y}\right)^2}+\frac{e^{2y}-1}{2e^y}\sqrt{\left(\frac{e^{2x}+1}{2e^x}\right)^2}=\frac{e^{2x}-1}{2e^x}\cdot\frac{e^{2y}+1}{2e^y}+\frac{e^{2y}-1}{2e^y}\cdot\frac{e^{2x}+1}{2e^x}=\frac{e^{2(x+y)}-1}{2e^{x+y}}=f(x+y)$, pentru orice numere reale x și y	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\frac{e^x\sqrt{x^2+1}-e^x\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}=$	**3p**
	$=\frac{e^x\left(x^2+1\right)-xe^x}{\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}}=\frac{e^x\left(x^2-x+1\right)}{\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}}$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(-x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{x\sqrt{x^2+1}}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\cdot\frac{e^x-e^{-x}}{x}\right)$	**2p**
	Cum $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\left(e^x-e^{-x}\right)'}{x'}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{1}=2$, obținem $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(-x)}{x}=2$	**3p**
c)	$f'(x)>0$, pentru orice număr real $x\Rightarrow f$ este strict crescătoare	**2p**
	$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ și f este continuă, deci $\operatorname{Im}f=(0,+\infty)$	**3p**
2.a)	$\int_0^2 f(x)dx=\int_0^2\frac{1}{x^2+4}dx=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}\Big\|_0^2=$	**3p**
	$=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}1-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}0=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{8}$	**2p**
b)	$0<\frac{1}{x^2+4}\leq\frac{1}{4}$, deci $0<\left(\frac{1}{x^2+4}\right)^n\leq\frac{1}{4^n}$, pentru orice $x\in[0,1]$ și orice număr natural n, deci $0\leq\int_0^1\left(\frac{1}{x^2+4}\right)^n dx\leq\int_0^1\frac{1}{4^n}dx$, de unde obținem $0\leq I_n\leq\frac{1}{4^n}$, pentru orice număr natural n	**3p**
	Cum $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{4^n}=0$, obținem $\lim\limits_{n\to+\infty}I_n=0$	**2p**
c)	$\int_0^a x f(x)dx=\int_0^a\frac{x}{x^2+4}dx=\frac{1}{2}\int_0^a\frac{\left(x^2+4\right)'}{x^2+4}dx=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+4\right)\Big\|_0^a=\frac{1}{2}\ln\left(a^2+4\right)-\frac{1}{2}\ln 4=\frac{1}{2}\ln\frac{a^2+4}{4}$	**3p**
	$\frac{1}{2}\ln\frac{a^2+4}{4}=\frac{1}{2}\ln\frac{5}{4}\Leftrightarrow a^2+4=5$ și, cum $a>0$, obținem $a=1$	**2p**